This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 2658.25.2

HARVARD COLLEGE
LIBRARY
Bought from the Bequest of
Horace Appleton Haven
Class of 1842
For the Purchase of
Books on Astronomy and Mathematics

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIA

APPROXIMATIONIS DUARUM FUNCTIONUM.

PARS PRIMA.

DISSERTATIO

QUAM

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS AUCTORITATE

PRO

SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

IN

UNIVERSITATE LITTERARIA BEROLINENSI

RITE ADIPISCENDIS

DIE XV. NOVEMBRIS MDCCCXXV

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

E. I. C. FRID. CHRISTIANUS DE RIESE

SERENISSIMO PRINCIPI A SALM-HORSTMAR A CONSILIIS CONCLAVIS, SOCIETATIS GOTTINGENSIS AMICORUM REI METALLICAE PERITORUM SODALIS.

OPPONENTIBUS:

ADOLPHO ERMAN, Philos. Cand.
HENRICO DOVE, Philos. Cand.
FRANCISCO HERTER, Philol. Sem. Sod.

BEROLINI

TYPIS ACADEMIAE REGIAE SCIENTIARUM.

MDCCCXXV.

Digitized by Google

Math 2658.25.2

HARVARD UNIVERSITY LIBRARY

1851. Dec 2

Haven Fund

Jacobi Library 820

Digitized by Google

INTRODUCTIO.

1.

Quantitas ab alia vel aliis, quocunque sit modo, dependens earum functio dicitur, hae ipsae autem optime elementa (1) functionis vel secundum usum astronomorum argumenta nominantur. Modus ille naturam (2) functionis determinat, unde haec praesertim nascuntur discrimina:

1) Modus ille operationibus analyticis sive arithmeticis vel exprimi potest vel non potest, e. g. n^{tus} numerus primus per ipsum n plane determinatus est, operationibus tamen arithmethicis ex ipso n deduci nequit. Quas autem arithmeticae ope exprimere licet functiones, fortasse convenit sensu speciali *arithmeticas* seu *analyticas* appellare.

2) Prout natura functionis vel aliunde definita vel non definita est, functio vel *determinata* vel *arbitraria* dicitur (3).

---

(1) Hoc nomine usi sunt Cll. Gauss et Crelle; vid. Comment. soc. Reg. Gotting. recent. Vol. II. Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. auctore C. F. Gauss, et Lagrange *Werke deutsch herausgegeben von A. L.* Crelle I. *Bd. pag.* 3.

(2) Natura functionis interdum etiam simpliciter functio appellatur, ubi igitur functio relationem quantitatum significat, vid. No. 3. huius articuli.

(3) Occurrunt eiusmodi functiones e. g. dum integrale aequationis quotientes differentiales partiales involventis quaeritur. Lagrange théorie des fonctions I. Partie No. 88. seq., Leçon XX du calcul des fonctions, Mémoires de Berlin année 1797. Mayer *höhere Analysis* 13*tes Capitel.* Lacroix traité du calcul différentiel et du calcul intégral Vol. II. No. 728. seqq.

Digitized by Google

3) Valor functionis mutari potest (1), dum elementorum unum vel plura variant, quae ipsa *absolute variabiles* seu *independentes*, valores functionis autem hac mutatione oriundi *relative variabiles* seu *dependentes* quantitates (2) nuncupantur; mutationes denique elementorum *incrementa* dici solent.

Relatione, quae inter mutationes independentium et dependentis locum habet, gravissimum nititur discrimen inter functiones *continuas* et *discontinuas*. Videlicet quantitatum quaelibet series vel complexus continuum exhibet, sive legi continuitatis satisfacit, ubi nulla tam exigua quantitas excogitari potest, qua non minor existat differentia inter binas consecutivas illarum quantitatum. Itaque si hoc de cuiusdam dependentis in functione data valoribus asserere licet, haec functio erit continua respectu illius dependentis habito. Quare cum in analysi functionis continuae notio ita usurpetur, ut functio respectu omnium variabilium continua intelligatur (nam cum functio mutuam relationem inter plures variabiles constituat, quaelibet variabilis tanquam a reliquis dependens spectari potest), functio *continua* erit ea, *quae quolibet cuiusque variabilis dato valore alium proxime sequentem eiusdem variabilis praebet ita comparatum, ut differentia inter ambos hosce valores absolute minor sit qualibet quantitate data* (3); *discontinua* e contrario erit functio, *si vel*

---

(1) Dictum est: *mutari potest*: nam ex altera quidem parte absurdum esset accipere, quantitatem aliquam ab alia dependere, simulque statuere, hanc ex illius, quaecunque concipiatur, mutatione nullam plane mutationem nancisci; ex altera parte autem facile intelligitur, casus exceptionis speciales existere posse, videlicet 1) si pro pluribus singularibus elementorum valoribus functio eundem accipit valorem, e.g. $y = \sin x\pi$, ubi pro quolibet valore ipsius x integro fit $y = o$; 2) si functio plura involvit elementa, pro singularibus variationum valoribus fieri potest, ut mutatio, quam valor functionis recipit variatione elementi alius, alius variatione destruatur; e. g. si $z = x + y$, et x augetur, y vero minuitur quantitate a.

(2) Cel. Dirksen *analytische Darstellung der Variations-Rechnung* §. 2.

(3) In hac definitione variabiles praecipue tanquam dependentes singulae spectandae sunt; nam eae, quae pro independentibus habentur, semper legi continuitatis satisfaciunt, quippe quibus ob eam ipsam rationem, quod independentes sunt, omnes omnino valores et reales (inde $a - \infty$ usque ad $+\infty$) et imaginarii tribui possint.

Digitized by Google

unum tantummodo valorem alicuius variabilis finitum producit, cui inveniri non potest respondens legi indicatae satisfaciens.

Ex hac definitione plura adhuc deduci possunt, quibus functiones continuae et discontinuae differunt. Nam ut functionem continuam dicere liceat, e lege continuitatis indicata sequitur, opus esse, ut de omnibus differentiis inter binos dependentis valores iudicari possit, id quod generaliter fieri nequit, nisi lex, qua pendet in proposita functione relative variabilis ab absolutis, analytice exprimi potest, sive nisi functio est analytica; functionem autem discontinuam esse, statim perspicimus, etsi minus illam cognitam habemus, dum scimus, in valoribus unius, cuiusdam variabilis saltum, ut ita dicam, adesse (1).

Haec autem variabilis, quam ponamus $= V$, certo tunc pro dependenti habenda est, quia si independentibus adnumeratur, *omnes* ei valores, itaque etiam eos, qui intra intervallum I, quod saltus ille complectitur, siti sunt, tribuere licet. Hoc autem casu cum necessario alia variabilis, quam ponamus $= V'$, pro dependenti assumenda sit, patet, per mutationem ipsius V intra intervallum I dependentem V' mutationem nullam recipere, quia casu inverso (vel ipsis V et V' permutatis) ex hypothesi valores quidam ipsius V' immediate vicini vel proximi pro

(1) Sunt quaedam functiones continuae, in quibus saltus etiam tales adesse videntur, quippe in quibus valor dependentis in infinitum abeat, dum elementa finita manent; uti: $y = tg\,x$ pro $x = \frac{1}{2}\pi$. Verum enim vero quum hi valores non subito a finito ad infinitum saliant, sed sensim sensimque eo increscant et inde decrescant, saltus revera non adsunt. Ceterum si independentis valore, qui reddit dependentem finitam, superato, signum dependentis mutatur, valor iste duplici signo $\pm$ affectus erit; quum semper tanquam ex divisore, qui pro hocce independentis valore aequalis fit nihilo, ortus spectari possit, nihilum autem non mutetur, utro signo afficiatur. Deinde etiam functiones quaedam discontinuae existunt, quibus lex continuitatis competere videri possit; videlicet eae, quae ex partibus quibusdam functionum continuarum compositae sunt: e. g. $y = \alpha + \beta x$ ab $x = o$ usque ad $x = a$, deinde $y = \alpha + \beta\,(a - x)$ ab $x = a$ usque ad $x = 2a$, $y = \alpha + \beta x$ ab $x = 2a$ usque ad $x = 3a$, et sic porro alternative. Hinc vero patet, eiusmodi ipsius y valorum seriem improprie tanquam ex una ipsius x functione ortam spectari, cum e pluribus colligatur. Denique expressiones quaedam uti x^0, $\frac{a^2 - ax}{a - x}$ falsam functionis ipsius x speciem prae se ferunt, revera enim ab ipsa x plane non pendent.

Digitized by Google

ipsa V valores producerent intervallo I inter se differentes. Hinc ergo sequitur, functionem quandam non minus discontinuam esse, si pro intervallis quibusdam valorum independentium eundem semper dependentis valorem producat (1), et hanc functionum discontinuarum notionem cum illa, si in valoribus unius cuiusdam variabilis saltus invenitur, correlata esse.

Quae cum ita sint, cumque functiones analyticae pro quolibet independentium valore, valorem dependentis vel realem vel imaginarium et generaliter loquendo, a reliquis diversum gignant, sive cum calculi differentialis ope directe demonstrari possit, omnes functiones analyticas etiam continuas esse (2), sine dubio asserere licet, nullam functionem discontinuam totam analytice (id est ita, ut nulla adiecta conditione speciali operationes arithmeticae indicatae valores functionis discontinuae *omnes* producant) exhiberi posse (3).

Denique notari convenit, continuitatis legem supra expositam ad functiones natura sua variantes applicari posse; et ut variationes naturae functionis huic legi satisfaciant, essentialis est conditio, cui calculus variationum innititur (4).

---

(1) Functio e. g. probabilitatis errorum x, quibus observationum genus quoddam est obnoxium, discontinua est, cum extra errorum possibilium limites semper valorem $= o$ assumere debeat; functio autem e^{-xx}, designante e basin logarithmorum naturalium, in praxi pro illa recepta non nisi proxime huic conditioni satisfacit.

(2) E theoremate ill. Lagrange circa errorem vel residuum, si series Tayloriana in terminis ordinis cuiusdam abrumpitur, (Théorie des fonctions I. No. 40 et 78.) facillime perspici potest, omnem functionem analyticam continuam esse, quia incrementa independentium semper statuere licet ita, ut ambo dependentis valores legi continuitatis satisfaciant.

(3) Quamquam Cl. Fourier (traité analytique sur la chaleur art. 229 aliisque) functiones discontinuas et arbitrarias per evolutiones secundum cosinus vel sinus multiplorum anguli cuiusdam progredientes exhiberi posse credit; id quod iam ea de causa erroneum est, quod talis evolutio semper functionem periodicam (conf. no. 4. huius art.) gignit. Cl. Poisson (Iournal de l'école polytechnique, cahier 18. pag. 417. et cahier 19. pag. 145.) hanc evolvendi methodum ad exhibendas *singulas* functionis cuiuslibet vel arbitrariae et discontinuae *partes* inservire posse asserit, cui manifesto nil obstat. Infra cap. II. paucis haec methodus exposita erit.

(4) Conf. Cl. Dirksen loco citato.

Digitized by Google

4) Functiones sunt vel *periodicae* vel *non periodicae*, quas *excurrentes* nominare licebit. In illis dependentis valores iidem in eodem ordine redeunt post certum intervallum sive dum certis quibusdam quantitatibus independentes crescunt, excurrentes autem functiones vel diversos vel eosdem quidem dependentis valores sed hos non semper in eodem ordine producunt. Trigonometricae e. g. functiones periodicae sunt, excurrentes autem logarithmicae, aequationes pro sectionibus conicis $y = \sqrt{px + (e^2 - 1)x^2}$, designante p parametrum et e excentricitatem, etc. Functio $\sqrt{px + (e^2 - 1)x^2}$ eosdem quidem ipsius y valores quoad quantitatem absolutam pluries gignit, sed vel inverso ordine vel signis oppositis.

5) Functiones denique analyticae pluribus modis dividi et subdividi possunt, prout aliud respicitur divisionis fundamentum, unde oriuntur discrimina inter functiones algebraicas et transcendentes, rationales et irrationales, integras et fractas, homogeneas et heterogeneas, symmetricas et non symmetricas, pares et impares, explicitas et implicitas, etc. Quarum definitiones quum satis notae atque praeterea a cel. Euler (1) fusius explicatae sint, non est, cur his immoremur, id quod insuper a proposito nostro nimis abduceret. Quod tamen ad functiones explicitas et implicitas (2) attinet, notare iuvat, *explicitam* esse functionem, si aequatio eam exhibens in unico tantum termino dependentem solam, in reliquis vero terminis non nisi independentes contineat; e contrario autem *implicitam* esse functionem, cuius aequatio dependentem indepen-

---

(1) Introd. in analys. inf. I. cap. 1 et 3. Attamen observare conveniet, definitiones clarissimi auctoris plures nimis arctas, pluresque, quas statuit, subdivisiones potius codivisiones, uti dicunt, esse. Sic functiones implicitas ad irrationales solum restringit, quae forma finita admissis etiam signis radicalibus evolvi nequeunt e. g. $X^7 = axX^2 - bx^5$, ubi X est functio ipsius x, quam theorematis ill. Lagrange ope in seriem evolvere licet.

(2) Functiones implicitae vel inexplicitae cum inexplicabilibus non sunt confundendae, quippe quae nullo modo evolvi possunt. Extant eiusmodi functiones e. g.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{x}, \text{ nec non } 1.2.3.\ldots\ldots x$$

a Cl. Euler in instit. calculi differentialis cap. XIV tractatae. Hinc in systemate functionum completo, in functionibus implicitis explicabiles et inexplicabiles discernendae sunt.

Digitized by Google

dentibus mixtam contineat. Quodsi itaque z variabilem dependentem et $x_1, x_2, \ldots x_\omega$ independentes designant, erit

forma explicita: $z = F(x_1, x_2, \ldots x_\omega)$ I.

forma autem implicita: $0 = \Phi(z, x_1, x_2, \ldots x_\omega)$ II.

Quoniam relatio inter z et $x_1, x_2, \ldots x_\omega$ eo modo comparata esse potest, ut expressione finita functio exhiberi nequeat, licebit etiam, formam II. tanquam generalem cuiusvis functionis analyticae et continuae enunciare.

Denique cum istarum functionum usus ceterarum usu multo sit frequentior, illae in universa mathesi functiones simpliciter nominari solent, quem morem itaque in posterum sequemur.

2.

Quae circa functionum naturam et relationes institui possunt disquisitiones, obiectum exhibent universae analysis; quae autem revera institutae et instituendae sint, inde praesertim pendet, quatenus in aliis rebus mathematicis et physicis usui esse possunt. Hinc ex hisce innumeris disquisitio de differentiis duarum functionum earundem variabilium, sive, quod idem est, quatenus altera functio ad alteram appropinquet, non ultimum fortasse locum obtinet, quippe cuius materiae in geometria aliisque disciplinis frequens est usus. — Quae cum ita sint, quamquam de huius materiae singulis partibus, praecipue quod attinet ad usum earum geometricum, summi mathematici iamiam egerunt, haud inutile tamen videtnr, methodo generali sive mere analytice (analysis enim est universae mathesis pars generalis) rem istam perscrutari. Quod cum sit hucusque a nemine factum, nostrum nunc sit institutum; priusquam autem ad rem ipsam progredi licet, momenta quaedam generalia indicare iuvat.

Appropinquationem duarum functionum cum nemo dubitet eo maiorem dicere, quo minores sint differentiae inter duas illas functiones, in gradum appropinquationis maxime inquirendum erit, ac praesertim in conditiones, quibus summus, quem licet attingere, gradus continea-

Digitized by Google

tur. Haec autem investigatio in vagis versaretur, nisi statim certa quaedam relatio inter valores independentium utriusque functionis statueretur. Quaecunque autem statuta sit relatio, facile patet, quaestionem ad casum eum simpliciorem reduci posse, quo isti valores in utraque functione aequales supponuntur, unde tota disquisitio huius perscrutatione absoluta erit.

Manifesto functiones continuae fere solae sunt, de quarum approximatione quaeri potest, quamobrem non nisi de ea in posterum sermo erit. Attamen praeteriri nequit, pro quibusdam discontinuis approximationem non minus locum habere. Sic terminos serierum quodammodo tanquam functiones discontinuas indicis spectare licet (1); summare autem seriem infinitam nil est, nisi quantitatem vel functionem earundem variabilium, quae seriei insunt, investigare, ad quam summa seriei, quo diutius ea evolvitur, eo magis accedat.

3

Functio ad aliam functionem pro certis quibusdam independentium valoribus appropinquat, si decrescentibus differentiis inter illos valores aliosque eiusdem variabilis vicinos differentiae inter valores utriusque dependentis respondentes decrescunt; maximaque appropinquatio adest, si utraque differentia simul evanescit, vel generaliter, si differentiae valorum utriusque dependentis, quantum fieri potest, minimae evadunt.

Qua in re investiganda, quo facilius conditiones et gradus art. 2. indicati eruantur, ac diquisitio ad normam aliquam redigatur, id agemus, ut primum ac potissimum in problema:

si et altera functio et independentium valores, pro quibus approximatio locum habere debet, dantur, alteram functionem, dum certa adhuc lege variare potest, ita determinare, ut pro illis independentium valoribus proxime ad priorem accedat,

---

(1) Quoties indici valores tantummodo certo intervallo distantes, e. g. numerorum naturalium tribuere licet.

Digitized by Google

inquiramus; duo autem reliqua, quae in hac disquisitione proponi possunt, problemata, videlicet alterum:

data utraque functione illos independentium valores (pro quibus scilicet approximatio locum habere debet) indagare,

et tertium:

functionem quaerere, quae ad dependentes e functione quadam, data sed certa lege variante, provenientes proxime accedat,

leviter tantum perstringamus; ex altera enim parte iisdem fundamentis nituntur, ex altera autem, quia aequationes sublimiores directe resolvi nequeunt, et ob defecta calculi integralis invictis difficultatibus premuntur. Conveniet insuper brevitatis gratia, functionem, quae in primo et secundo problemate tanquam data supponitur, *absolutam*, alteram vero *approximantem*, valores deinde independentium, pro quibus approximatio quaeritur, *valores pro approximatione* appellare, atque functionem absolutam semper per litteram f, approximantem vero per litteram ϕ indicare, signis variabilium vel omissis vel, prout opus est, adscriptis.

Ut denique, quod ad principale nostrum problema attinet, divisiones statuantur necessariae, maxime discernendi erunt duo hi casus, quibus functio quaesita

vel 1) pro singulis discretis independentium valoribus,

vel 2) pro omnibus earum valoribus, qui inter limites quosdam inveniri possunt, i. e. pro earum valorum complexione continua, approximare debet; illoque casu rursus distinguendum erit, prout cuiusque independentis vel unus vel plures valores pro approximatione dati sunt.

Poterit etiam ex numero constantium arbitrariarum et functionis approximantis ordine distinctionis principium peti, quum facile perspiciatur, differentias inter variabiles relativas caeteris paribus eo minores reddi posse, quo plures adsint quantitates determinandae, quoque similiores sint formae ambarum functionum.

Cum vero prioris distinctionis fundamentum maioris sit momenti, eam potius in disquisitione instituenda adhibebimus.

Digitized by Google

CAPUT I.

FUNCTIO APPROXIMANS QUAERITUR, UBI VALORES PRO APPROXIMATIONE SUNT DISCRETI.

SECTIO I.

SI UNUS EIUSMODI VALOR PRO QUAVIS VARIABILI ABSOLUTA DATUS EST.

4.

Functio ϕ, quam quaerimus, vel plane, id est, quoad ipsam formam, vel solummodo quoad constantes ut incognita seu determinanda spectari potest. Quod vero ad illum casum attinet, statim perspicitur, problema pro approximatioue in genere plane indeterminatum esse, quippe cui innumeris modis satisfieri possit, pro summa autem approximatione problema sponte solutum esse, ponendo *indefinite* $\phi = f$.

Restat itaque casus secundus. Cuius respectu cum statim pateat, aequationi $\phi = f$ substitutis valoribus pro approximatione (ergo definite) semper satisfieri posse, si ipsa ϕ vel unam tantummodo quantitatem constantem arbitrariam continet, manifesto de maiori approximatione pro pluribus constantibus arbitrariis sive de gradu approximationis, quem pro his attingere liceat, e differentiis solummodo inter valores dependentis ipsarum f et ϕ pro aliis independentium valoribus vicinis diiudicari potest. Ad inveniendas itaque hasce differentias, evolvamus utramque functionem in seriem progredientem secundum potestates et producta incrementorum; quo facto statim sese manifestabit, maximam appropinquationem prodire, si effici potest, ut tot termini utriusque evolutionis conspirent, quot adsunt in functione ϕ constantes. Quae cum ita sint, tanquam fundamentum huius disquisitionis spectandum est sequens theorema.

Digitized by Google

THEOREMA.

Designantibus f et ϕ functiones variabilium $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\omega$ independentium, et involvente ipsa ϕ constantium numerum N, nec non substitutis loco ipsorum $x_1, x_2, \ldots x_\omega$ suis pro approximatione valoribus, utraque functio convertatur in seriem progredientem secundum dimensiones incrementorum, quorum potestatum exponentes seriem ascendentem (ita ut ad $+\infty$ vergant) constituunt.

Quibus positis ut functio ϕ ad alteram f, quantum fieri potest proxime accedat, requiritur,

1mo ut series exponentium in utraque functione eandem legem sequatur, atque

2do ut sit $\phi = f$, et aequales inveniantur vel reddi possint coëfficientes, quibus ex $N-1$ reliquis terminis primis utriusque functionis bini eadem producta eorundem incrementorum continentes affecti sunt.

Cum demonstratio huius propositionis, quicunque sit independentium numerus ω **unitatem superans**, nihil mutetur, statuamus $\omega = 2$, porro $x_1 = x$, $x_2 = y$, valores pro appropinquatione respective $= a$ et b, nec non incrementa $= k$ et l.

His positis evolvendo prodit:

$$\begin{aligned} f(x+k,y+l) = f(x,y) &+ C_{1,0}\,k^{\kappa'} + C_{2,0}\,k^{\kappa''} + C_{3,0}\,k^{\kappa'''} + C_{4,0}\,k^{\kappa''''} + \ldots. \\ &+ C_{0,1}\,l^{\lambda'} + C_{0,2}\,l^{\lambda''} + C_{0,3}\,l^{\lambda'''} + C_{4,0}\,l^{\lambda''''} + \ldots. \\ &+ k^{\kappa'}\left\{C_{1,2}\,l^{\lambda'} + C_{1,2}\,l^{\lambda''} + C_{1,3}\,l^{\lambda'''} + \ldots\right\} \\ &+ k^{\kappa''}\left\{C_{2,1}\,l^{\lambda'} + C_{2,2}\,l^{\lambda''} + \ldots\right\} \\ &+ \text{etc.} \qquad \text{(I}a\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x+k,y+l) = \phi(x,y) &+ \Gamma_{1.0}\,k^{\mu'} + \Gamma_{2,0}\,k^{\mu''} + \Gamma_{3,0}\,k^{\mu'''} + \Gamma_{4,0}\,k^{\mu''''} + \ldots\ldots \\ &+ \Gamma_{0.1}\,k^{\nu'} + \Gamma_{0,2}\,l^{\nu''} + \Gamma_{0.3}\,l^{\nu'''} + \Gamma_{0,4}\,l^{\nu''''} + \ldots\ldots \\ &+ k^{\mu'}\left\{\Gamma_{1,1}\,l^{\nu'} + \Gamma_{1.2}\,l^{\nu''} + \Gamma_{1,3}\,l^{\nu'''} + \ldots\ldots\right\} \\ &+ k^{\mu''}\left\{\Gamma_{2,1}\,l^{\nu''} + \Gamma_{2,2}\,l^{\nu'''} + \ldots\ldots\right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

atque e theoremate nostro pro $x = a$ et $y = b$ esse debet:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} 1^{mo}\ \varkappa' = \mu',\ \varkappa'' = \mu'', \text{ etc.} \\ \quad \lambda' = \nu',\ \lambda'' = \nu'', \text{ etc.} \\ 2^{do}\ f(a,b) = \phi(a,b), \text{ sive sequentibus analogice: } C_{0,0} = \Gamma_{0,0} \\ \quad C_{1,0} = \Gamma_{1,0},\ C_{2,0} = \Gamma_{2,0}, \text{ etc.} \\ \quad C_{0,1} = \Gamma_{0,1},\ C_{0,2} = \Gamma_{0,2}, \text{ etc.} \\ \quad C_{1,1} = \Gamma_{1,1},\ C_{1,2} = \Gamma_{1,2}, \text{ etc.} \\ \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}\right\} (Ib)$$

Evolutio fit successive pro unaquaque variabilium eo modo, ut, si eius initum fit ab ipsa x, posito $x + k$ loco ipsius x, deinde $f(x+k, y) = f(x, y) + k^{p'} P$, pro ipso $k^{p'}$ concipiatur altissima potestas ipsius k, qua $f(x+k, y) - f(x,y)$ est divisibilis, ita ut $P_1 = \frac{f(x+k,y) - f(x,y)}{k^{p'}}$ nec fiat $= 0$, nec $= \infty$ pro $k = 0$. Quibus cum coëfficiens P prodeat *in forma*

$$P_1 = C_{1,0} + k^{p''} P_2,$$

sequitur ex eadem ratione, p'' esse quantitatem positivam, et $C_{1,0}$ esse coefficientem terminorum expressionis $f(x+k, y) - f(x, y)$, qui sola potestate $k^{x'}$ affecti sunt. Porro simili modo, accipiendo $k^{p''}$ ita, ut $P_2 = \frac{P_1 - C_{1,0}}{k^{p''}}$ nec fiat $= 0$, nec $= \infty$ pro $k = 0$, invenitur:

$$P_2 = C_{2,0} + k^{p'''} P_3,$$

unde patet esse $p' = \varkappa'$, $p' + p'' = \varkappa''$ etc. Deinde evolutione pro ipsa x facta, in quolibet termino hinc prodeunte substituto $y + l$ ipsius y loco, eodem modo singuli termini obtinentur; unde, cum eadem de altera functione ϕ valeant, evolutiones supra indicatae enascentur (1).

Hinc sequitur:

1mo cum eadem prodire debuissent, si inverso ordine processeris, exponentes ipsius l in omnibus terminis eandem legem per litteras $\lambda', \lambda'', \lambda'''$... indicatam sequi. Ponamus enim substituto $y + l$ loco ip-

(1) Conf. Lagrange theorie des fonctions I. No. 3. et II, 13.

Digitized by Google

sius y transire $C_{1,0}\,k^{\varkappa'}$ in $C_{1,0}\,k^{\varkappa'} + C_{1,1}\,k^{\varkappa'}.\,l^{\lambda'} +$ etc., substituto autem $x+k$ loco ipsius x ex $C_{0,1}.l^{\lambda'}$ fieri $C_{0,1}.l^{\lambda'} + C^1_{1,1}.l^{\lambda'}.k^{\psi'} +$ etc. Sponte vero patet, expressiones $C_{1,1}\,k^{\varkappa'}.l^{\lambda'}$ et $C^1_{1,1}\,k^{\psi'}.l^{\lambda'}$, nisi habeatur simul $\chi' = \lambda'$ et $\psi' = \varkappa'$, et $C^1_{1,1} = C_{1,1}$, identicas esse non posse, quod autem, quia ordo in substitutionibus plane arbitrarius est, necessario locum habere debet. Eadem ratiocinatio manifesto pro terminis sequentibus et pro functione ϕ valet.

2do Existente relatione ipsius Q et q ad y in functione $f(x,y)$, atque ipsius Π et π ad y in quantitate P, eadem, quam tenent P et p ad x in $f(x,y)$, quantitates $k^{\varkappa''}.P_2$ et $l^{\lambda''}.Q_2$ et $k^{\varkappa'}.l^{\lambda'}.\Pi_1$ vel $k^{\varkappa'}.l^{\lambda'}.\Pi_1$ (cum per supra dicta facile intelligatur esse $\pi' = \lambda'$) manifesto aequales fiunt nihilo positis $k = l = 0$. Hinc autem patet, incrementa k et l tam exigua supponi posse, ut quantitates $k^{\varkappa''}.P_2$, $l^{\lambda''}.Q_2$ et $k^{\varkappa'}.l^{\lambda'}.\Pi_1$ minores evadant quacunque quantitate data ergoque in qualibet ratione minores quam ipsa $C_{1,0}$ et $C_{1,0}$, quo rursus efficitur ut termini ordinis primi, puta $k^{\varkappa'}\,C_{1,0}$ et $l^{\lambda'}\,C_{0,1}$, summam reliquorum

$$k^{\varkappa'+\varkappa''}.P_2 + l^{\lambda'+\lambda''}.Q_2 + k^{\varkappa'}.l^{\lambda'}.\Pi_1$$

in quacunque ratione data superent. Quibus positis, si in evoluta functione ϕ non foret $\mu' = \varkappa'$, $\nu' = \lambda'$ etc., manifesto alia functio $\chi(x,y)$ vel tres tantum constantes arbitrarias involvens ita assumi poterit, ut, si evoluta praebet $\chi(a,b) + \Gamma_{1,0}\,k^{\varkappa'} + \Gamma_{0,1}\,l^{\lambda'} +$ etc., constantium arbitrarium ope aequationibus $f(a,b) = \chi(a,b)$, $C_{1,0} = \Gamma_{1,0}$, $C_{0,1} = \Gamma_{0,1}$ satisfiat, unde functio assumta propius ad $f(x,y)$ accederet quam ϕ, sive exhiberet

$$f(a+k, b+l) - \chi(a+k, b+l) > f(a+k, b+l) - (a+k, b+l)$$

quam exigua capiantur incrementa k et l, e quibus itaque sequeretur, ut iam ob tres terminos primos functionis ϕ approximatio non esset maxima, quam pro numero suarum constantium suppeditare potuisset. Simili modo respectu terminorum secundi alteriorisque ordinis argumentari licet, unde prodit, si

Digitized by Google

1mo functio $\phi(a+k, b+l)$ in seriem secundum dimensiones ipsarum k et l progredientem conversa eandem quam $f(a+k, b+l)$ eodem modo evoluta non exhibet exponentium legem, sive

2do determinatio constantium ex aequationibus $C_{1,0}=\Gamma_{1,0}$, $C_{0,1}=\Gamma_{0,1}$ etc. etc., valores impossibiles constantium produceret;

functionem ϕ summum pro numero suorum constantium gradum appropinquationis non praebere, contra vero, hunc gradum locum habere et aequationibus (Ib) satisfieri, correlata esse.

5.

Quod theorema art. praecedentis attinet, sequentia adhuc observare conveniet:

1) Prodit hinc modus accurate determinandi gradum approximationis, quippe qui summo ordini terminorum, qui in utraque functione conspirant, aequatur; ita ut approximatio primi gradus adsit, si habetur $\varkappa' = \mu'$, $\lambda' = \nu'$, simulque $f(a, b) = \phi(a, b)$, $C_{1,0} = \Gamma_{1,0}$, $C_{0.1} = \Gamma_{0,1}$, quibus pro secundo ordine accederet $\varkappa'' = \mu''$, $\lambda'' = \nu''$, $C_{2,0} = \Gamma_{2,0}$, $C_{1.1} = \Gamma_{1,1}$, $C_{0,2} = \Gamma_{0,2}$; et sic porro pro tertio altioreve gradu, unde facile perspicitur, multitudinem terminorum, quos congruere oportet, crescente numero ordinis valde augeri. Quo clarius autem et generaliter relatio inter hanc multitudinem et approximationis ordinem perspiciatur, sit:

$$^{m}T^{0} = 1$$

$$^{m}T^{1} = {}^{m}T^{0} + {}^{m-1}T^{0} + {}^{m-2}T^{0} + \ldots\ldots {}^{2}T^{0} + {}^{1}T^{0} + {}^{0}T^{0} = 1 + m$$

$$^{m}T^{2} = {}^{m}T^{1} + {}^{m-1}T^{1} + {}^{m-2}T^{1} + \ldots\ldots {}^{2}T^{1} + {}^{1}T^{1} + 1 = \frac{(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2}$$

$$^{m}T^{3} = {}^{m}T^{2} + {}^{m-1}T^{2} + {}^{m-2}T^{2} + \ldots\ldots {}^{2}T^{2} + {}^{2}T^{2} + 1 = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$^{m}T^{\omega} = {}^{m}T^{\omega-1} + {}^{m-1}T^{\omega-1} + {}^{m-1}T^{\omega-1} + \ldots\ldots {}^{2}T^{\omega-1} + {}^{1}T^{\omega-1} + 1 = \frac{(m+\omega)(m+\omega-1)\ldots\ldots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \omega}$$ (1)

(1) Haec aequationes facillime sequenti modo demonstrantur. Manifesto $^{m}T^{\omega,+1}$ est summa omnium $^{m}T^{\omega}$ inde ab ipso $m = o$ usque ad $m = m$. E differentiarum autem theoria constat, terminum seriei generalem μ^{tum} esse aequalem differentiae terminorum

Digitized by Google

facileque patebit ${}^{m}T^{\omega}$ esse numerum omnium terminorum formae m^{ti} ordinis et ω variabiles involventis (1) hincque terminorum, quos in functionibus f et ϕ evolutis ac ω variabiles independentes continentibus identi-

---

$\mu - 1^{ti}$ et μ^{ti} in serie illius seriei summatoria, quorum praeterea secundum (scilicet μ^{tum}) ex priori $(\mu-1)^{to}$ prodire, in hocce ponendo variabilis independentis ω loco *hanc ipsam* suo incremento auctam. Quod cum sit nostro casu unitati aequale, patet haberi

$$ {}^{m}T^{\omega} = {}^{m}T^{\omega+1} - {}^{m-1}T^{\omega+1} = \Delta\,{}^{m-1}T^{\omega+1} $$

unde substitutis eorum valoribus esse debet

$$ \frac{(m+\omega)\,(m+\omega-1)\,\ldots\ldots\,(m+1)}{1\,\ldots\ldots\,\omega} = \frac{(m+\omega+1)\,(m+\omega)\,\ldots\ldots\,(m+1)}{1\,\ldots\ldots\,(\omega+1)} = \frac{(m+\omega)\,\ldots\ldots\,(m+1)\,m}{1\,\ldots\ldots\,(\omega+1)} $$

quam aequationem identicam esse, facillima reductione intelligitur; est enim:

$$ \frac{(m+\omega+1)\,\ldots\,(m+1) - (m+\omega)\,\ldots\ldots\,m}{1\,\ldots\ldots\,(\omega+1)} = \frac{(m+\omega)\,\ldots\ldots\,(m+1)}{1\,\ldots\ldots\,\omega\,.\,(\omega+1)}\left\{(m+\omega+1)-m\right\} = \frac{(m+\omega)\,\ldots\ldots\,(m+1)}{1\,\ldots\ldots\,\omega} $$

conf. insuper Lacroix traité du calcul diff. et integ. III. No. 1033. edit. 1810-1819.

(1) Manifesto forma talis ex ω quantitatibus transit in formam ex $(\omega+1)$ multiplicando per

$$ \alpha + \alpha' x_{\omega+1} + \alpha^{2} x^{2}_{\omega+1} + \alpha^{3} x^{3}_{\omega+1} + \ldots\ldots \alpha^{m} x^{m}_{\omega+1} $$

sed reiectis omnibus terminis ordinem m transgredientibus; quare si proposita pro ω quantitatibus valent, duceretur

ipsa	$x^{0}_{\omega+1}$	in ${}^{m}T^{\omega}$	terminos
	$x^{1}_{\omega+1}$	- ${}^{m-1}T^{\omega}$	-
	$x^{2}_{\omega+1}$	- ${}^{m-1}T^{\omega}$	-
	$\vdots$		
	$x^{m-1}_{\omega+1}$	- ${}^{1}T^{\omega}$	-
	$x^{m}_{\omega+1}$	- ${}^{0}T^{\omega} = 1$	terminum

sive semel apparebit. Hinc itaque terminorum, quos forma m^{ti} ordinis et $\omega+1$ variabiles involvens continet, numerus erit:

$$ {}^{m}T^{\omega} + {}^{m-1}T^{\omega} + {}^{m-2}T^{\omega} + \ldots\ldots {}^{0}T^{\omega} = {}^{m}T^{\omega+1} $$

unde proposita etiam pro $\omega+1$ quantitatibus valebunt.

Digitized by Google

cos esse oportet, ut approximatio m^{ti} gradus prodeat; quippe qui termini et in forma indicata et in hisce functionibus sunt omnes omnium dimensionum inde a o^{ta} usque ad m^{tam} incl., quos ex ω quantitatibus conflare licet, si quidem summa indicum, quibus exponentes affecti sunt, pro numero dimensionem cuiuslibet termini indicante habetur, ita ut generaliter productum $k^{x'} . l^{\lambda'}$ sit $(r+s)^{tae}$ demensionis.

Praeterea haec ex evolutione polynominii

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . x_\omega + x_{\omega+1})^m$$

secundum potestates ipsius $x_{\omega+1}$ intelligi possunt. Constat enim omnes polynomii cuiusdam potestatis m^{tae} terminos esse dimensionis m^{tae}, quamobrem ponendo

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . + x_\omega) = \Pi^1,$$

coefficiens ipsius	erit aggregatum omnium terminorum polynomii	quorum terminorum numerus sit
$x^m_{\omega+1}$	Π^0	${}^0P^\omega$
$x^{m-1}_{\omega+1}$	Π^1	${}^1P^\omega$
$x^{m-2}_{\omega+1}$	Π^2	${}^2P^\omega$
$\vdots$		
$x^0_{\omega+1}$	Π^m	${}^mP^\omega$

Sponte vero intelligitur esse

$${}^0P^\omega + {}^1P^\omega + {}^2P^\omega + \ldots . {}^mP^\omega = {}^mP^{\omega+1},$$

unde eodem, quo in nota praecedente factum est, modo invenitur

$${}^mP^{\omega+1} = \frac{(m+\omega) \ldots . (m+1)}{1 \ldots . \omega},$$

ergoque patet fore

$${}^mP^{\omega+1} = {}^mT^\omega.$$

Facile deinde vel delendo eosdem in numeratore et denominatore factores, si $\omega > m+1$, vel adponendo eosdem, si $\omega < (m+1)$, patet haberi

$${}^mT^\omega = \frac{(m+\omega) \ldots . (m+1)}{1 \ldots . \omega} = \frac{(m+\omega) \ldots . (\omega+1)}{1 \ldots . m} = {}^\omega T^m$$

unde prodit theorema: formam ω variabilium et m^{ti} ordinis eundem quam formam m variabilium et ω^{ti} ordinis habere terminorum multitudinem.

Digitized by Google

Quodsi igitur ipsa ϕ continet N (*) constantes arbitrarias, ut m^{tus} approximationis gradus *attingi* possit, esse oportet

$$N \geqq (**)\ ^{m}T^{w}, \text{ atque, si habetur simul } N < ^{m+1}T^{w},$$

hic gradus erit pro constantium numero N *summus*; qua de re, ubi functio ϕ est integra rationalis, art. 8 plura continebit.

6.

2) Plerumque evolutiones, de quibus art. 4 sermo fuit, ope regularum vulgarium calculi differentialis peragi poterunt, quo casu coëfficientes $C_{1,0}$ etc. et $\Gamma_{1,0}$ etc. fiunt quotientes differentiales, ac exponentes $\varkappa'$ $\varkappa''$ etc. λ' λ'' etc. nec minus μ' μ'' etc. ν' ν'' etc. seriem numerorum naturalium exhibent, ubi igitur prima conditio (art. 4) per se locum habet. Hinc evolutiones (*Ia*), posito rursus $\omega = 2$, fiunt:

$$\begin{aligned}
f(x+k, y+l) = f(x,y) &+ \frac{\partial f}{\partial x}k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}l + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}kl + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\frac{k^2 l}{1.2} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{l^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\frac{kl^2}{1.2} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{l^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \\
&+ \text{etc.} \\
\phi(x+k, y+l) = f(x,y) &+ \frac{\partial \phi}{\partial x}k + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{k}{1.2} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{\partial \phi}{\partial y}l + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y}kl + \ldots\ldots \\
&+ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\frac{l}{1.2} + \ldots\ldots \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned} \qquad (\text{II}a)$$

(*) Diversae quantitates ex pluribus aequationibus eliminari nequeunt, quoties in singulis eodem coefficiente ac in omnibus uno eodemque exponente affecti sunt. E. g. ex. aeq.

$$a(m+n) + bp = A,\ c(m+n) + dp = B \text{ et } e(m+n) + fp = C$$

summa $m+n$ quidem plus quam determinata est, sed quantitates m et n singulae inveniri nequeunt. Constantes itaque functionis ϕ, qui simili modo in aequationibus (*Ib*) occurrunt, *pro una* habendae sunt, hincque numerus N determinandus.

(**) Semel pro semper observemus, signa uti $\geqq$, $\leqq$, $\gtrless$, alternative esse intelligenda.

Digitized by Google

et aequationes (*Ib*), substitutis in quotientibus differentialibus a et b resp. pro x et y, transibunt in:

$$f(a,b) = \phi(a',b),\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \text{ etc.}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \text{ etc.} \qquad (\text{II}b)$$

Si itaque appropinquatio m^{ti} gradus requiritur, numerus aequationum earum, quibus satisfieri oportet, cum sit $^{m}T^{\omega}$, aequationes (II. *b*) continuandae sunt usque ad

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m},\ \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \cdot \partial y} = \frac{\partial^m \phi}{\partial x^{m-1} \cdot \partial y} \text{ etc. } \frac{\partial^m f}{\partial y^m} = \frac{\partial^m \phi}{\partial y^m}$$

7.

3) Nulla omnino facta de natura functionis ϕ suppositione, nec terminorum numerus, qui identici evadere possint in evolutionibus, nec itaque approximationis gradus, quem assequi liceat, propius definiri potest. Plerisque vero casibus ϕ erit forma secundum dimensiones variabilium progrediens, vel secundum functiones earum aliam legem quandam sequentes e. g.

$$\phi(x,y) = A_{0,0} + A_{1,0}\,x + A_{2,0}\,x^2 + \\ + A_{0,1}\,y + A_{1,1}\,y + \\ + A_{0,2}\,y^2 + \qquad (a)$$

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = {} & A_{0,0} + A_{1,0}\cos x + A_{2,0}\cos 2x + A_{3,0}\cos 3x + \ldots\ldots \\ & + A_{0,1}\cos y + A_{1,1}\cos x\cos y + A_{2,1}\cos 2x\cos y + \ldots \\ & + A_{0,2}\cos 2y + A_{1,2}\cos x\cos 2y + A_{2,2}\cos 2x\cos 2y + \ldots \\ & + B_{1,1}\sin x\cos y + B_{2,1}\sin 2x\cos y + B_{3,1}\sin 3x\cos y + \\ & + B_{1,2}\sin x\cos 2y + B_{2,2}\sin 2x\cos 2y + B_{3,2}\sin 3x\cos 2y + \\ & + C_{1,1}\cos x\sin y + C_{2,1}\cos 2x\sin y + \ldots\ldots \qquad (b) \\ & + C_{1,2}\cos x\sin 2y + C_{2,2}\cos 2x\sin 2y + \ldots\ldots \\ & + D_{1,0}\sin x + D_{2,0}\sin 2x + \ldots\ldots \\ & + D_{0,1}\sin y + D_{1,1}\sin x\sin y + \ldots\ldots \\ & + D_{0,2}\sin 2y + D_{1,2}\sin x\sin 2y + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Digitized by Google

sive functio ϕ secundum potestates ipsorum $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$, $\sin y$ aut $\log x$, $\log y$ etc. progredietur, sive denique functiones repetitas (1) continebit e. g.

$$\phi x = A_0 + A_1 \log x + A_2 \overset{2}{l}x + A_3 \overset{3}{l}x \qquad (c)$$

existente $\overset{2}{l}x = \log(\log x)$, $\overset{3}{l}x = \log(\overset{2}{l}x)$.

Forma (a) et quae ex eiusmodi pluribus conflare possunt expressiones irrationales vel fractae, fere solae erunt aliunde natae, quae postea cum functione f comparantur; reliquae vero plerumque tanquam ex evolutione ipsius f ortae erunt spectandae, unde continuata evolutione eo usque, ut pro desiderato approximationis gradu sit $N \geqq {}^{\omega}T^{\omega}$, sua sponte conditionibus art. 4. stabilitis satisfacient.

Qua de causa, et cum insuper omnes functiones, si paucos casus exceperis, ope theorematis Tayloriani ad plures variabiles extensi in forma (a) evolvi possint, ac denique cum generaliter complicatiora ad simpliciora reduci soleant, et hinc formae (a) usus ceterarum usu sit multo frequentior, hanc formam fusius perlustrabimus.

8.

Numerus terminorum N formae (a) legem art. 5. indicatam sequitur; progrediente igitur hac forma usque ad ordinem n^{tum} habetur $N = {}^{n}T^{\omega}$.

... Iam si pro functione ϕ forma rationalis integra *explicita* ω variabiles absolutas continens accipitur, haec non minus erit pars evolutionis ipsius f, quippe quae oritur, dum functio f per seriem Taylorianam usque ad terminos n^{ti} ordinis incl., positis incrementis resp. $= x_1, x_2 \ldots x_\omega$, evolvitur; sive functio ϕ huius evolutionis ope sponte inventa erit, atque n^{tum} approximationis gradum praebebit.

Si vero 1mo summus, quem generaliter forma n^{ti} gradus praebere possit, gradus approximationis, sive 2do forma, quae m^{tum} huiusmodi

---

(1) *Wiederholte Functionen, Abhandlungen der Berliner Academie der Wissenschaften aus den Jahren* 1812–1813; *Abhandlung von Tralles, vorgelesen den* 1. *Aug.* 1811.

Digitized by Google

gradum suppeditet, ordinis infimi desideratur, variabilis relativa eodem, quo sunt absolutae, modo in functionem ϕ introducenda est, unde pro ipsa ϕ formam n^{ti} ordinis et $(\omega+1)$ variabiles continentem obtinemus; sive, quod eodem redit, hisce casibus pro functione ϕ accipienda est forma *implicita* m^{ti} ordinis et ω variabiles absolutas continens. Sint enim variabiles absolutae x, y etc., dependens vero z, erit functionis approximantis aequatio:

$$\begin{aligned}0=\phi(x,y,z)=&A_{0,0,0}+A_{1,0,0}x+A_{0,1,0}y+A_{0,0,1}z+\ldots..\\&+A_{2,0,0}x^2+A_{1,1,0}xy+A_{0,2,0}y^2+A_{1,0,1}xz\\&+A_{0,1,1}yz+A_{0,0,2}z^2+\ldots..\\&+A_{3,0,0}x^3+A_{2,1,0}x^2y+A_{1,2,0}xy^2+A_{0,3,0}y^3\\&+A_{2,0,1}x^2z+A_{1,1,1}xyz+A_{0,2,1}y^2z\\&+A_{1,0,2}xz^2+A_{0,1,2}yz^2+A_{0,0,3}z^3+\ldots..\\&+\text{etc}.\ldots\ldots\end{aligned}\qquad\text{(III.)}$$

Numerus terminorum aequationis (III.), quam supponamus esse ordinis n, manifesto ex art. 5. est ${}^{n}T^{\omega+1}$, designante ω numerum independenter variabilium. Cum vero indicante Q quantitatem arbitrariam realem, aequatio $0=Q.\phi(x,y,z)$ nec magis nec minus late pateat, quam $0=\phi(x,y,z)$, ac, si pro $\frac{1}{Q}$ aliqua quantitatem $A_{0,0,0}$ etc. accipitur, terminus respondens aequationis (III.) coëfficientem 1 recipiat; numerus N coëfficientium revera indeterminatorum erit $={}^{n}T^{\omega+1}-1$. Sponte hinc patet, talem formam certo approximationem n^{ti} gradus praebere, quae deinde an ad altiorem $(n+q)^{tum}$ promoveri possit, secundum art. 5. ex relatione

$$N\gtreqless {}^{n}T^{\omega}\text{ sive }{}^{n}T^{\omega}\lesseqgtr {}^{n}T^{\omega+1}-1\text{ sive }{}^{n+q}T^{\omega}\lesseqgtr {}^{n}T^{\omega+1}-1\qquad\text{(IV. }a\text{)}$$

diiudicandum erit. Substituendo scilicet ipsius ${}^{n}T^{\omega}$ valore ex art. 5. et ponendo $\overset{1}{C}_{\omega}=1+2+3\ldots..+\omega$, $\overset{2}{C}_{\omega}=$ summae productorum e binis numerorum $1, 2, \ldots..\omega$, $\overset{3}{C}_{\omega}$ summae productorum ex ternis etc., per reductiones satis obvias prodit:

Digitized by Google

$$m^{\omega} + \overset{1}{C}_{\omega}\, m^{\omega-1} + \overset{2}{C}_{\omega}\, m^{\omega-2} + \ldots\ldots + 2\,\overset{\omega}{C}_{\omega}(*) - \frac{(\omega+1+n)\ldots(n+1)}{\omega+1} \gtrless 0 \quad (IV.b)$$

qua in formula, si modo aequalitatis signum spectatur, manifesto aequationis radix positiva vel, hac fractionem involvente, pars eius integra

---

(*) Quum quantitates $\overset{1}{C}_{\omega}$, $\overset{2}{C}_{\omega}$, saepius in analysi occurrant, methodum eas inveniendi facilem hic assignare licebit, quae calculum tam simplicem, quam qui pro rei complicatione vix exspectari possit, praebet. Recurrens quidem ista methodus est, sed solummodo ab $\overset{\mu}{C}_{\omega}$, ad $\overset{\mu+1}{C}_{\omega}$, illa vero ill. Lagrange (Memoires de Berlin, année 1771), quam cl. Lacroix ad differentiam numerorum ab unitate diversam et ad seriem quocunque numero incipientem extendit (Calcul diff. et integ. III. pag. 304. ed. 1810-19.), pro $\overset{\mu+1}{C}_{\omega}$ omnes eiusmodi quantitates inde ab $\overset{\mu}{C}_{\omega}$ usque ad $\overset{1}{C}_{\omega}$ involvit, calculum praeterea complicatiorem requirit.

Priusquam ad methodum istam progrediamur, summationem quandam coefficientium binomialium indicare iuvat. Sit itaque

$$\overset{r}{B}_{\omega} = \frac{\omega\,(\omega-1)\ldots\ldots(\omega-r+1)}{1\ldots\ldots r},$$

tunc facili substitutione ex nota art. 5. colligitur:

$$\overset{r}{B}_{\omega} + \overset{r}{B}_{\omega-1} + \overset{r}{B}_{\omega-2} + \ldots\ldots \overset{r}{B}_{r} = \overset{r+1}{B}_{\omega+1}, \qquad (1)$$

et similiter

$$\overset{r}{B}_{\omega-1} + \overset{r}{B}_{\omega-2} \ldots\ldots \overset{r}{B}_{r} = \overset{r+1}{B}_{\omega}.$$

Addendo deinde ad hanc seriem, alias similes resp. ab

$$\overset{r}{B}_{\omega-2},\ \overset{r}{B}_{\omega-3},\ \text{etc.....}\ \overset{r}{B}_{r}$$

incipientes, ac subtrahendo earum summam a serie (1) per quantitatem ω multiplicatam, prodit:

$$\omega.\overset{r}{B}_{\omega} + (\omega-1)\overset{r}{B}_{\omega-1} + (\omega-2)\overset{r}{B}_{\omega-2} \ldots\ldots + r.\overset{r}{B}_{r} =$$

$$= \omega.\overset{r+1}{B}_{\omega+1} - \left\{\overset{r+1}{B}_{\omega} + \overset{r+1}{B}_{\omega-1} + \overset{r+1}{B}_{\omega-2} \ldots + \overset{r+1}{B}_{r+1}\right\} = \omega.\overset{r+1}{B}_{\omega+1} - \overset{r+2}{B}_{\omega+1} \qquad (2)$$

ut ex aequatione (1) apparet, scribendo $r+1$ loco ipsius r, et $(\omega-1)$, $(\omega-2)$, $\ldots\ldots(r+1)$ loco ipsius ω.

Simili modo ex formula (2) deducitur

$$\omega.(\omega-1)\overset{r}{B}_{\omega} + (\omega-1)(\omega-2)\overset{r}{B}_{\omega-1} + (\omega-2)(\omega-3)\overset{r}{B}_{\omega-2} + \ldots + r.(r-1)\overset{r}{B}_{r} =$$

$$= \omega.(\omega-1)\overset{r+1}{B}_{\omega+1} - 2.(\omega-1)\overset{r+2}{B}_{\omega+1} + 2.1\overset{r+3}{B}_{\omega+1}$$

Digitized by Google

erit ipsius m valor maximus; atque facile perspicitur, hanc aequationem unam tantummodo radicem positivam realem habere, quia una tantummodo signorum alternatio ei inest. Ceterum huius radicis pars integra

---

et hinc:

$$\omega.(\omega-1)(\omega-2)\,{}^{\omega}\overset{r}{\mathrm{B}} + (\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)\,{}^{\omega-1}\overset{r}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots r.(r-1)(r-2) =$$
$$= \omega.(\omega-1)(\omega-2)\,{}^{\omega+1}\overset{r+1}{\mathrm{B}} - 3(\omega-1)(\omega-2)\,{}^{\omega+1}\overset{r+2}{\mathrm{B}} + 3.2(\omega-2)\,{}^{\omega+1}\overset{r+3}{\mathrm{B}} - 3.2.1\,{}^{\omega+1}\overset{r+4}{\mathrm{B}}$$

sive generaliter:

$$\omega(\omega-1)..(\omega-p)\,{}^{\omega}\overset{r}{\mathrm{B}} + (\omega-1)(\omega-2)..(\omega-p-1)\,{}^{\omega-1}\overset{r}{\mathrm{B}} + (\omega-2)(\omega-3)..(\omega-p-2)\,{}^{\omega-2}\overset{r}{\mathrm{B}} + \ldots + r.(r-1)..(r-p)$$
$$= \omega.(\omega-1)(\omega+2)\ldots\ldots\ldots(\omega-p)\,{}^{\omega+1}\overset{r+1}{\mathrm{B}} - (p+1)(\omega-1)(\omega-2)\ldots.(\omega-p)\,{}^{\omega+2}\mathrm{B}$$
$$+ (p+1)p.(\omega-2)\ldots\ldots\ldots(\omega-p)\,{}^{\omega+1}\overset{r+3}{\mathrm{B}} - (p+1)p.(p-1)(\omega-3)\ldots.(\omega-p)\,{}^{\omega+1}\overset{r+4}{\mathrm{B}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{p}\left\{(p+1)p.(p-1)\ldots.2.(\omega-p)\,{}^{\omega+1}\overset{r+p+1}{\mathrm{B}} - (p+1)p.(p-1)\ldots.1\,{}^{\omega+1}\overset{r+p+2}{\mathrm{B}}\right\} \quad (3)$$

Haec formula eadem, qua in nota 1ma art. 5. usi sumus methodo, comprobari potest. Posito scilicet $(\omega-1)$ loco ipsius ω in formula (3), eaque, quae hinc prodit, expressione ab aequatione (3) subtracta, manifesto resultare debet

$$\omega.(\omega-1) - (\omega-p)\,{}^{\omega}\overset{r}{\mathrm{B}}$$

Iam si littera Σ termino initiali serici nostrae praefixa eius summam designat, habetur:

$$\Sigma(\omega-1)\ldots\ldots(\omega-p-1)\,{}^{\omega-1}\overset{r}{\mathrm{B}} =$$
$$= (\omega-1)(\omega-2)\ldots\ldots(\omega-p-1)\,{}^{\omega}\overset{r+1}{\mathrm{B}} - (p+1)(\omega-2)\ldots\ldots(\omega-p-1)\,{}^{\omega}\overset{r+2}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + (-1)^{r}\left\{(p+1).p.2.(\omega-p-1)\,{}^{\omega}\overset{r+p+1}{\mathrm{B}} - (p+1)\ldots\ldots 1\,{}^{\omega}\overset{r+p+2}{\mathrm{B}}\right\}$$

ergoque eam sit

$${}^{\omega+1}\overset{r+h+1}{\mathrm{B}} = \frac{(\omega+1)}{r+h+1}\,{}^{\omega}\overset{r+h}{\mathrm{B}} \quad \text{et} \quad {}^{\omega}\overset{r+h+1}{\mathrm{B}} = \frac{(\omega-r-h)}{r+h+1}\,{}^{\omega}\overset{r+h}{\mathrm{B}}$$

binorum terminorum ordinis h post iuitialem differentia aequalis erit quantitati

$$\left\{\frac{(\omega+1)(\omega-h)-(\omega-p-1)(\omega-r-h)}{(r+h+1)}\right\}(p+1).p\ldots.(p-h+2)(\omega-h-1)\ldots.(\omega-p)\,{}^{\omega}\overset{r+h}{\mathrm{B}}.$$

Factor auctem primus, quem uncis inclusimus, scribi potest:

$$\left\{\frac{(\omega-h)(\omega+1-(\omega-r-h))+(p-h+1)(\omega-r-h)}{r+h+1}\right\} = (\omega-h)+\frac{(p-h+1)(\omega-r-h)}{r+h+1},$$

unde erit huius differentiae pars secunda

Digitized by Google

ipsum n superare nequit, nisi habetur $n > \omega$, uti iam ex theoremate, notae art. 5. vel ex formula (IV. a) perspici potest. Posito enim $m = n+1$ hanc formulam ita exhibere licet:

$$= +(p+1)\ldots(p-h+2)(p-h+1)(\omega-h-1)\ldots(\omega-p)\frac{(\omega-r-h)}{r+h+1}\,{}^{\omega}\mathrm{B}^{r+1}$$

$$= +(p+1)\ldots(p-h+2)(p-h+1).(\omega-h-1)\ldots(\omega-p)\,{}^{\omega}\mathrm{B}^{r+1+1} \qquad \text{☿}$$

Hac differentia pro positiva accepta, differentia terminorum sequentium ordinis $(h+1)$ erit uegativa, vel vice inversa. Posito itaque $(h+1)$ loco ipsius h in formulis ⊙ et ☾, ex hac prodibit

$$-(\omega-h-1)-\frac{(p-h)(\omega-r-h-1)}{r+h+2}$$

atque terminorum ordinis $(h+1)$ differentiae pars prima

$$= -(p+1)\ldots(p+h+1)(\omega-h-1)(\omega-h-2)\ldots(\omega-p)\,{}^{\omega}\mathrm{B}^{r+h+2} \qquad \text{♀}$$

unde expressionum ☿ et ♀ ope elucet, differentiae terminorum ordinis h partem secundum per primam differentiae ordinis $(h+1)$ plane destrui. Pro $h = o$ autem manifesto differentiae pars prior est

$$\omega\,.\,(\omega-1)\ldots(\omega-p)\,{}^{\omega}\mathrm{B}^{r},$$

uti prodire debet, et pro $h = p+1$ differentiae penultimae pars secunda et tota differentia ultima sese destruit, quoniam factor eius primus

$$\frac{\omega+1-(\omega-r-p-1)}{r+p+2} = 1.$$

His de coefficientium binomialium summatione praemissis, cumque habetur

$$\overset{1}{C}_{\omega} = {}^{\omega+1}\overset{2}{\mathrm{B}} = \frac{(\omega+1)\,\omega}{2}$$

et generaliter:

$$\overset{\mu}{C}_{\omega} = \omega\,.\,\overset{\mu-1}{C}_{\omega-1} + (\omega-1)\,\overset{\mu-1}{C}_{\omega-2} + \ldots\ldots\,\overset{\mu-1}{C}_{\mu-1}$$

statuendo successive $\mu = 2, = 3$ etc., facile perspicitur, summam $\overset{\mu}{C}_{\omega}$ induere formam generalem

$$\begin{aligned}
\overset{\mu}{C}_{\omega} = {} & \omega\,.\,(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)(\omega-5)\ldots\ldots\ldots\ldots(\omega-\mu+1)\,{}^{\omega+1}\overset{\mu+1}{\mathrm{B}} \\
& + \left\{\overset{1}{a}\,.\,\omega\,.\,(\omega-1)\ldots\ldots(\omega-\mu+2) + \overset{2}{a}\,\omega\,.\,(\omega-1)\ldots(\omega-\mu+3) + \ldots + \overset{\mu}{a}\,.\,\omega + \overset{\mu+1}{a}\right\}{}^{\omega+1}\overset{\mu+2}{\mathrm{B}} \\
& + \left\{\overset{1}{b}\,\omega\,.\,(\omega-1)\ldots\ldots(\omega-\mu+3) + \overset{2}{b}\,\omega\,.\,(\omega-1)\ldots(\omega-\mu+4) + \ldots + \overset{\mu-1}{b}\,\omega + \overset{\mu+1}{b}\right\}{}^{\omega+1}\overset{\mu+3}{\mathrm{B}} \\
& + \left\{\overset{1}{c}\,\omega\,.\,(\omega-1)\ldots\ldots(\omega-\mu+4) + \ldots + \overset{\mu-2}{c}\,\omega + \overset{\mu-1}{c}\right\}{}^{\omega+1}\overset{\mu+4}{\mathrm{B}} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + u\,{}^{\omega+1}\overset{2\mu}{\mathrm{B}}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$(n+1+\omega)\ldots\ldots(n+2) \geqq \frac{(n+1)}{\omega+1}(n+\omega+1)\ldots\ldots(n+2) - 1, 2, 3\ldots\omega$$

sive, cum sit $\frac{n+1}{\omega+1} = 1 + \frac{n-\omega}{\omega+1}$,

$$1\ldots\ldots\omega \overset{\geqq}{<} \frac{n-\omega}{\omega+1}(n+\omega+1)\ldots\ldots(n+2) \qquad \text{(IV. } c\text{)}$$

unde pro $n = \omega$ prodiret $1\ldots\ldots\omega \overset{\geqq}{<} 0$, quod absurdum esset.

Quum vero ad solvendas altiorum graduum aequationes methodus directa nondum constet, consultius erit, problematis etiam huius aliam solutionem non minus quidem indirectam sed expeditum calculum praebentem quaerere. Posito $m = n + q$, habetur:

$$^{\omega+q}T^{\omega} = \frac{(\omega+n+q)\ldots\ldots(n+q+1)}{1\ldots\ldots\omega} = \frac{(\omega+n+q)\ldots\ldots(\omega+n+1)(\omega+n)\ldots\ldots(n+1)}{1\ldots\ldots\omega\times(n+q)\ldots\ldots(n+1)}$$

Lex vero, qua coëfficientes $a, b\ldots\ldots u$ ex ipso μ formantur, tam complicata est, ut generaliter eam exhibere difficillime sit. Verum enim vero, quum factoriales (factorielles cl. Arbogast) $\omega^{\cdot}.(\omega-1)$ etc., quae etiam coëfficientes binomiales constituunt, in potestates ipsius ω resolvi possint, et reductis omnibus B ad $^{\omega+1}\overset{\mu+1}{B}$, manifesto in eorum coëfficientibus, quibus tum affecti erunt in formula 4, potestas ipsius ω nulla altior quam $\omega^{\mu-1}$ inveniatur, patet, quantitati $\overset{\mu}{C}_{\omega}$ formam etiam assignari posse:

$$\overset{\mu}{C}_{\omega} = {}^{\omega+1}\overset{\mu+1}{B}\left\{\alpha + \overset{1}{\alpha}\omega + \overset{2}{\alpha}\omega^2 + \overset{3}{\alpha}\omega^3 + \ldots\ldots + \overset{\mu-1}{\alpha}\omega^{\mu-1}\right\} \qquad (5)$$

Ad indagandos deinde coëfficientes α, $\overset{1}{\alpha}$, etc., ponamus $\mu+1$ et $\omega+1$ resp. loco ipsius μ et ω, unde, acceptis β, $\overset{1}{\beta}$ etc. pro iisdem ipsius $(\mu+1)$ functionibus, quae sunt α, $\overset{1}{\alpha}$ etc. ipsius μ, prodit:

$$\overset{\mu+1}{C}^{\omega+1} = {}^{\omega+2}\overset{\mu+2}{B}\left\{\beta + \overset{1}{\beta}(\omega+1) + \overset{2}{\beta}(\omega+1)^2 + \ldots\ldots + \overset{\mu}{\beta}(\omega+1)^{\mu}\right\} \qquad (6)$$

Nec minus, cum sit

$$\overset{\mu+1}{C}_{\omega+1} = \overset{\mu+1}{C}_{\omega} + (\omega+1)\overset{\mu}{C}_{\omega},$$

habetur:

$$\overset{\mu+1}{C}_{\omega+1} = (\omega+1).{}^{\omega+1}\overset{\mu+1}{B}\left\{\alpha + \overset{1}{\alpha}\omega + \overset{2}{\alpha}\omega^2 + \ldots\ldots + \overset{\mu-1}{\alpha}\omega^{\mu-1}\right\}$$
$$+ {}^{\omega+1}\overset{\mu+2}{B}\left\{\beta + \overset{1}{\beta}\omega + \overset{2}{\beta}\omega^2 + \ldots\ldots + \overset{\mu}{\beta}\omega^{\mu}\right\} \qquad (7)$$

Hinc, quoniam constat esse:

$${}^{\omega+2}\overset{\mu+2}{B} = {}^{\omega+1}\overset{\mu+1}{B}.\frac{(\omega+2)}{\mu+2} \quad \text{et} \quad {}^{\omega+1}\overset{\mu+2}{B} = {}^{\omega+1}\overset{\mu+1}{B}\frac{(\omega-\mu)}{\mu+2} \quad \text{atque} \quad {}^{\mu}\overset{\mu-h}{B} = {}^{\mu}\overset{h}{B}$$

Digitized by Google

et hinc $$\frac{(\omega+n+q)\ldots\ldots(\omega+n+1)}{(n+q)\ldots\ldots(n+1)}\cdot {}^{n}T^{\omega} \lessgtr {}^{n}T^{\omega+1}-1$$

vel sumtis logarithmis:

$$\log(\omega+n+q)-\log(n+q) \lessgtr \log({}^{n}T^{\omega+1}-1)-\log {}^{n}T^{\omega} - \begin{Bmatrix}\log(\omega+n+q-1)+\ldots\ldots+\log(\omega+n+1)\\ -\log(n+q-1)-\ldots\ldots-\log(n+1)\end{Bmatrix} \quad \text{(IV. } d\text{)}$$

cuius formulae ope, substituendo primo ipsi q unitatem vel alium numerum integrum probabilem et deinde successive maiores, valor ipsius

---

sequitur ex formula (6), evolutis potestatibus,

$$\frac{{}^{\mu+1}C_{\omega+1}}{{}^{\mu+1}B} = \frac{\omega+2}{\mu+2}\left\{(\beta+\overset{1}{\beta}+\overset{2}{\beta}\ldots+\overset{\mu}{\beta})+(\overset{1}{\beta}+2\overset{2}{\beta}+3\overset{3}{\beta}\ldots+\mu\overset{\mu}{\beta})\omega+(\overset{2}{\beta}+3\overset{3}{\beta}+{}^{4}\overset{2}{B}\overset{4}{\beta}\ldots+{}^{\mu}\overset{2}{B}\overset{\mu}{\beta})\omega^{2}\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+(\overset{\mu-2}{\beta}+{}^{\mu-1}\overset{\mu-2}{B}\overset{\mu-1}{\beta}+{}^{\mu}\overset{\mu-2}{B}\overset{\mu}{\beta})\omega^{\mu-2}+(\overset{\mu-1}{\beta}+{}^{\mu}\overset{\mu-1}{B}\overset{\mu}{\beta})\omega^{\mu-1}+\overset{\mu}{\beta}\omega^{\mu}\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{\beta+\overset{1}{\beta}+\overset{2}{\beta}\ldots+\overset{\mu-1}{\beta}+\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}+\left\{\frac{\beta+(2+1)\overset{1}{\beta}+(2.2+1)\overset{2}{\beta}+(2.3+1)\overset{3}{\beta}+\ldots+(2(\mu-1)+1)\overset{\mu-1}{\beta}+(2\mu+1)\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}\omega$$
$$+\left\{\frac{\overset{1}{\beta}+(2.1+2)\overset{2}{\beta}+(2.3+3)\overset{3}{\beta}+(2^{4}\overset{2}{B}+{}^{4}\overset{1}{B})\overset{4}{\beta}+\ldots\ldots\ldots+(2^{\mu-1}\overset{2}{B}+{}^{\mu-1}\overset{1}{B})\overset{\mu-1}{\beta}+(2\,{}^{\mu}\overset{2}{B}+{}^{\mu}\overset{1}{B})\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}\omega^{2}$$
$$+\left\{\frac{\overset{2}{\beta}+(2+3)\overset{3}{\beta}+(2^{4}\overset{3}{B}+{}^{4}\overset{2}{B})\overset{4}{\beta}+(2^{5}\overset{3}{B}+{}^{5}\overset{2}{B})\overset{5}{\beta}+\ldots.+(2^{\mu-1}\overset{3}{B}+{}^{\mu-1}\overset{2}{B})\overset{\mu-1}{\beta}+(2\,{}^{\mu}\overset{3}{B}+{}^{\mu}\overset{2}{B})\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}\omega^{3} \quad (8)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left\{\frac{\overset{\mu-3}{\beta}+(2+{}^{\mu-1}\overset{1}{B})\overset{\mu-2}{\beta}+(2.{}^{\mu-1}\overset{1}{B}+{}^{\mu-1}\overset{2}{B})\overset{\mu-1}{\beta}+(2\,{}^{\mu}\overset{2}{B}+{}^{\mu}\overset{3}{B})\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}\omega^{\mu-2}$$
$$+\left\{\frac{\overset{\mu-2}{\beta}+(2+{}^{\mu-1}\overset{1}{B})\overset{\mu-1}{\beta}+(2\,{}^{\mu}\overset{1}{B}+{}^{\mu}\overset{2}{B})\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}\omega^{\mu-1}$$
$$+\left\{\frac{\overset{\mu-1}{\beta}+(2+\mu)\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right\}\omega^{\mu}+\frac{\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\omega^{\mu+1}$$

et ex formula (7)

$$\frac{{}^{\mu+1}C_{\omega+1}}{{}^{\mu+1}B} = \alpha-\frac{\mu\beta}{\mu+2}+\left\{\alpha+\overset{1}{\alpha}+\frac{(\beta-\mu\beta)}{\mu+2}\right\}\omega+\left\{\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\alpha}+\frac{(\overset{1}{\beta}-\mu\overset{2}{\beta})}{\mu+\beta}\right\}\omega^{2}$$
$$+\left\{\overset{2}{\alpha}+\overset{3}{\alpha}+\left(\frac{\overset{2}{\beta}-\mu\overset{3}{\beta}}{\mu+2}\right)\right\}\omega^{3}+\ldots+\left\{\overset{\mu-3}{\alpha}+\overset{\mu-2}{\alpha}-\left(\frac{\overset{\mu-3}{\beta}-\mu\overset{\mu-2}{\beta}}{\mu+2}\right)\right\}\omega^{\mu-2} \quad (9)$$
$$+\left\{\overset{\mu-1}{\alpha}+\overset{\mu-2}{\alpha}+\left(\frac{\overset{\mu-2}{\beta}-\mu\overset{\mu-1}{\beta}}{\mu+2}\right)\right\}\omega^{\mu-1}+\left\{\overset{\mu-1}{\alpha}+\left(\frac{\overset{\mu-1}{\beta}-\mu\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2}\right)\right\}\omega^{\mu}+\frac{{}^{\mu}\beta}{\mu+2}\omega^{\mu+1}$$

Digitized by Google

q quaesitus paucis tentaminibus invenitur. Sit e. g. $\omega = 3$, $n = 7$, erit ${}^{n}T^{\omega} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$, et ${}^{n}T^{\omega+1} = 120 . \frac{11}{4} = 330$, unde habetur:

$$\log {}^{n}T^{\omega+1} - 1 = 2,51720$$
$$\log {}^{n}T^{\omega} = 2,07918$$
$$0,43802$$

pro $q = 1$	$\log \frac{11}{8}$	$= 0,13830$
$q = 2$	$\log \frac{12}{9}$	$= 0,12494$
$q = 3$	$\log \frac{13}{10}$	$= 0,11394$
		$= 0,37718$
		$= 0,06084$
$q = 4$	$\log \frac{14}{11}$	$= 0,10474$

Ergo valor ipsius q quaesitus $= 3$, sive per formam 7^{mi} ordinis tres variabiles absolutas involventem approximatio 10^{mi} gradus obtineri potest; simulque, cum sit hoc casu ${}^{m}T^{\omega} = {}^{n}T^{\omega} . \frac{11}{8} . \frac{12}{9} . \frac{13}{10}$, cuius logarithmus $= 2,45636$, invenitur terminorum functionis ϕ, de quibus alio modo disponere licet, numerus $= {}^{n}T^{\omega+1} - {}^{m}T = 380 - 286 = 44$ (v. infra).

Quodsi contra dato ipsius m valore, minimus ipsius n quaeritur, hic non minus formulae (IV *a*.) ope inveniri potest.

Quare, cum aequationes (8) et (9) necessario sint identicae, sequentes prodeunt aequationes:

$$\frac{\overset{\mu}{\beta}}{\mu+2} = \frac{\overset{\mu-1}{\alpha}}{2\mu+2} = \overset{\mu-1}{\alpha}\overline{|1,0|}$$

$$\frac{\overset{\mu-1}{\beta}}{(\mu+2)} = -\left(\frac{2\,{}^{a}\overset{1}{\mathrm{B}}+{}^{\mu}\overset{2}{\mathrm{B}}}{2\mu+1}\right)\overset{\mu}{\beta} + \frac{\overset{\mu-1}{\alpha}}{2\mu+1} + \frac{\overset{\mu-2}{\alpha}}{2\mu+1} = -\overset{\mu-1}{\alpha}\left\{\mu\left(\frac{2+\mu-1}{2\mu+1}\right)\overline{|1,0|} - \frac{1}{2\mu+1}\right\} + \frac{\overset{\mu-2}{\alpha}}{2\mu+1}$$
$$= -\overset{\mu-1}{\alpha}\overline{|1,1|} + \overset{\mu-2}{\alpha}\overline{|2,1|}$$

$$\frac{\overset{\mu-2}{\beta}}{\mu+2} = \frac{\overset{\mu-3}{\alpha}}{2\mu} + \frac{\overset{\mu-2}{\alpha}}{2\mu} - \frac{\overset{\mu}{\beta}}{2\mu}\frac{\mu.(\mu-1)}{1.2}\left(2+\frac{\mu-2}{3}\right) - \frac{\overset{\mu-1}{\beta}}{2\mu}.(\mu-1)\left(2+\frac{\mu-2}{2}\right)$$
$$= -\overset{\mu-1}{\alpha}\left\{\frac{\mu.(\mu-1)}{1.2}\left(2+\frac{\mu-2}{3}\right)\frac{\overline{|1,0|}}{2\mu} + (\mu-1)\left(2+\frac{\mu-2}{2}\right)\frac{\overline{|1,1|}}{2\mu}\right\}$$
$$-\overset{\mu-2}{\alpha}\left\{(\mu-1)\left(2+\frac{\mu-2}{2}\right)\frac{\overline{|2,1|}}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\right\} + \frac{\overset{\mu-3}{\alpha}}{2\mu} = -\overset{\mu-1}{\alpha}\overline{|1,2|} - \overset{\mu-2}{\alpha}\overline{|2,2|} + \overset{\mu-3}{\alpha}\overline{|3,2|}$$

et sic porro. Pro calculo autem numerico ipsorum β formulae, quae ex coëfficientibus inferiorum ipsius ω potestatum sequuntur, commodiores sunt; videlicet:

Digitized by Google

Pro solutione scilicet, primae praecedentis problematis analoga, quantitas $^{\omega}T^{\omega+1}$ evolvi debet, unde emergit:

$$\overset{5}{\beta} = (\overset{4}{\alpha} + \overset{5}{\alpha})\frac{\mu+2}{\mu+7} - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\left(1+\frac{2.2}{5}\right)\frac{\overset{6}{\beta}}{\mu+7} - \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{2.3}{5}\right)\frac{\overset{7}{\beta}}{\mu+7}$$
$$- \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\left(1+\frac{2.4}{5}\right)\frac{\overset{8}{\beta}}{\mu+7} - \text{etc.}$$

$$\overset{4}{\beta} = (\overset{3}{\alpha} + \overset{4}{\alpha})\frac{\mu+2}{\mu+6} - \frac{5.4.3}{1.2.3}\left(1+\frac{2.2}{4}\right)\frac{\overset{5}{\beta}}{\mu+6} - \frac{6.5.4}{1.2.3}\left(1+\frac{2.3}{4}\right)\frac{\overset{6}{\beta}}{\mu+6}$$
$$- \frac{7.6.5}{1.2.3}\left(1+\frac{2.4}{4}\right)\frac{\overset{7}{\beta}}{\mu+6} - \frac{8.7.6}{1.2.3}\left(1+\frac{2.5}{4}\right)\frac{\overset{8}{\beta}}{\mu+6} - \text{etc.}$$

$$\overset{3}{\beta} = (\overset{2}{\alpha} + \overset{3}{\alpha})\frac{\mu+2}{\mu+5} - \frac{4.3}{1.2}\left(1+\frac{2.2}{3}\right)\frac{\overset{4}{\beta}}{\mu+5} - \frac{5.4}{1.2}\left(1+\frac{2.3}{3}\right)\frac{\overset{5}{\beta}}{\mu+5} - \frac{6.5}{1.2}\left(1+\frac{2.4}{3}\right)\frac{\overset{6}{\beta}}{\mu+5}$$
$$- \frac{7.6}{1.2}\left(1+\frac{2.5}{3}\right)\overset{7}{\beta} - \frac{8.7}{1.2}\left(1+\frac{2.6}{3}\right)\frac{\overset{8}{\beta}}{\mu+5} - \text{etc.}$$

$$\overset{2}{\beta} = (\overset{1}{\alpha} + \overset{2}{\alpha})\frac{\mu+2}{\mu+4} - 3\left(1+\frac{2.2}{2}\right)\frac{\overset{3}{\beta}}{\mu+4} - 4\left(1+\frac{2.3}{2}\right)\frac{\overset{4}{\beta}}{\mu+4} - 5\left(1+4\right)\frac{\overset{5}{\beta}}{\mu+4}$$
$$- 6\left(1+5\right)\frac{\overset{6}{\beta}}{\mu+4} - \frac{7.7\overset{7}{\beta}}{\mu+4} - \frac{8.8\overset{8}{\beta}}{\mu+4} - \text{etc.}$$

$$\overset{1}{\beta} = (\overset{0}{\alpha} + \alpha)\frac{\mu+2}{\mu+3} - (1+2.2)\frac{\overset{2}{\beta}}{\mu+3} - \frac{7\overset{3}{\beta}}{\mu+3} - \frac{9\overset{4}{\beta}}{\mu+3} - \frac{11\overset{5}{\beta}}{\mu+3} - \frac{13\overset{6}{\beta}}{\mu+3} - \frac{15\overset{7}{\beta}}{\mu+3} - \frac{17\overset{8}{\beta}}{\mu+3} - \text{etc.}$$

$$\overset{0}{\beta} = \overset{0}{\alpha} - \frac{2\overset{1}{\beta}}{\mu+2} - \frac{2\overset{2}{\beta}}{\mu+2} - \frac{2\overset{3}{\beta}}{\mu+2} - \frac{2\overset{4}{\beta}}{\mu+2} - \frac{2\overset{5}{\beta}}{\mu+1} - \text{etc.}$$

Ex istis aequationibus, generaliter ea, quae ipsum $\overset{\mu}{\beta}$ praebet, omnes β inde ab ipso $\overset{\mu+1}{\beta}$ usque ad $\overset{\mu}{\beta}$ incl. involuit; unde incipiendo ab ipso $\overset{\mu}{\beta}$ et statuendo successive $\mu=1, =2$ etc. tandem prodit:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{C}_\omega &= {}^{\omega+1}\overset{2}{\mathrm{B}} \\
\overset{2}{C}_\omega &= {}^{\omega+1}\overset{3}{\mathrm{B}}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\omega\right) \\
\overset{3}{C}_\omega &= {}^{\omega+1}\overset{4}{\mathrm{B}}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}\omega^2\right) \qquad (\overset{0}{\alpha} \text{ sive } \overset{0}{\beta} \text{ invenitur} = 0) \\
\overset{4}{C}_\omega &= {}^{\omega+1}\overset{5}{\mathrm{B}}\left(-\tfrac{1}{6} - \tfrac{5}{24}\omega + \tfrac{5}{16}\omega^2 + \tfrac{5}{16}\omega^3\right) \\
\overset{5}{C}_\omega &= {}^{\omega+1}\overset{6}{\mathrm{B}}\left(-\tfrac{3}{8}\omega - \tfrac{7}{16}\omega^2 + \tfrac{1}{8}\omega^3 + \tfrac{3}{16}\omega^4\right) \qquad \overset{0}{\alpha} = 0 \qquad (10) \\
\overset{6}{C}_\omega &= {}^{\omega+1}\overset{7}{\mathrm{B}}\left(\tfrac{79}{504} + \tfrac{5}{18}\omega - \tfrac{7}{18}\omega^2 - \tfrac{35}{64}\omega^3 + \tfrac{7}{64}\omega^5\right) \qquad \overset{4}{\alpha} = 0 \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$0 \gtrless \frac{n^{\omega+1} + \overset{1}{C}_{\omega+1} . n^{\omega} + \overset{2}{C}_{\omega+1} . n^{\omega-1} \ldots . + \overset{\omega}{C}_{\omega+1} . n + \overset{\omega+1}{C}_{\omega+1}}{1 \ldots . (\omega+1)} - 1 - {}^{m}T^{\omega}$$

sive

$$0 \gtrless n^{\omega+1} + \overset{1}{C}_{\omega+1} . n^{\omega} + \overset{2}{C}_{\omega+1} . n^{\omega-1} \ldots + \overset{\omega}{C}_{\omega+1} n - (\omega+1) . (m+\omega) \ldots (m+1)$$

ubi valor ipsius n positivus realis aequationi satisfaciens (1), si est numerus integer, vel, si fractus, numerus integer proxime maior gradum quaesitum indicabit.

Quod ad alteram, alteri problematis praecedentis solutioni similem attinet, statuamus $n = m - q$, qno facto habetur:

$${}^{m}T^{\omega} \gtrless \frac{(\omega+m+1-q)\,(\omega+m-q) \ldots . (m-q+1)}{1 \ldots . (\omega+1)} - 1$$

sive

$${}^{m}T^{\omega} \gtrless \frac{{}^{m}T^{\omega}}{\omega+1} \cdot \frac{m . (m-1) \ldots . (m-q+1)}{(\omega+m) \ldots . (\omega+m+2-q)} - 1$$

sive

$$\frac{({}^{m}T^{\omega}+1)\,(\omega+1)}{{}^{m}T^{\omega}} \gtrless \frac{m . (m-1) \ldots . (m-q+1)}{(\omega+m) \ldots (\omega+m+2-q)}$$

itaque

$$\text{pro } q = 1 \ldots . \frac{({}^{m}T^{\omega}+1)\,(\omega+1)}{{}^{m}T^{\omega}} \gtrless m$$

$$\text{pro } q = 2 \ldots . \frac{({}^{m}T^{\omega}+1)\,(\omega+1)}{{}^{m}T^{\omega} . m} \gtrless \frac{(m-1)}{(\omega+m)}$$

$$\vdots$$

etc.

$$\text{pro } q = q \ldots . \frac{({}^{m}T^{\omega}+1)\,(\omega+1)}{{}^{m}T^{\omega}} \cdot \frac{(\omega+m) \ldots (\omega+m-q+3)}{m \ldots (m-q+2)}$$

$$\gtrless \frac{(m-q+1)}{(\omega+m-q+2)}, \qquad \text{(IV. } e\text{)}$$

quae formulae simili modo atque illa supra pro ipso n inventa logarithmorum ope calculo subiiciuntur.

Sit e. g. $\omega = 3$, $m = 10$, habetur ${}^{m}T^{\omega} = \frac{13.12.11}{1.2.3} = 286$

$$\text{ergo } \log \frac{{}^{m}T^{3}+1}{{}^{m}T^{\omega}} = \log \tfrac{287}{286} = 0,00151$$

$$\log (\omega+1) = \log 4 = 0,60206$$

$$0,60358$$

(1) Ob rationem primi problematis occasione indicatam unus tantummodo eiusmodi valor existit.

Digitized by Google

Cum sponte pateat, $q = 1$ poni posse, tentemus $q = 2$; erit:

$$\log \frac{({}^{m}T^{\omega}+1)(\omega+1)}{{}^{m}T^{\omega}.m} = 9,60357$$

$$\text{pro } q = 2 \qquad \log \tfrac{9}{13} = 9,84230$$

$$9,76127$$

$$\text{pro } q = 3 \qquad \log \tfrac{8}{12} = 9,82397$$

$$9,93736$$

$$\text{pro } q = 4 \qquad \log \tfrac{7}{11} = 9,80371$$

unde elucet, 3 esse valorem ipsius q maximum, sive 7 ipsius n minimum.

Generaliter asseri et e formulis IV. *c. d. e.* intelligi potest, quo maior sit differentia $n - \omega$, eo maiorem ipsius q valorem prodire, atque hanc differentiam pro eodem ipsius q valore eo maiorem esse debere, quo maior sit numerus ω.

Pro valore speciali ipsius $\omega = 2$, formulae IV. simpliciores evadunt. Habetur scilicet e formulis art. 5. evolutis:

$${}^{m}T^{2} = \frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}m + 1 \quad \text{et} \quad {}^{n}T^{3} = \frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{11}{6}n + 1,$$

quibus substitutis facilique reductione prodit:

$$3\,m^2 + 9\,m + 6 \overset{=}{<} n^3 + 6\,n^2 + 11\,n,$$

sive

$$q^2 + (2n+3)\,q \overset{=}{<} \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2}{3}\,n - 2 \qquad \text{(IV.}f\text{)}$$

unde numeri *integri* pro n, m sive q accipiendi facile determinantur; e. g. pro $n = 2$ invenitur $q^2 + 7\,q = 6$, quo statim patet, impossibile esse, pro ipso q numerum integrum positivum accipere, qui conditioni satisfaciat, ergoque per formam secundi ordinis duarum independentium approximationem ultra secundum gradum nos assequi non posse, uti etiam ex formula IV. *c* prodiit.

Hinc accepto pro m summo, pro n infimo, qui relationi IV. *a* satisfaciat, numero integro, quoties functio ϕ plures variabiles absolutas involvit, generaliter loquendo plures eius constantes indeterminatae remanent; si vero ad gradum $(m+1)^{tum}$ respicis, plus quam determinatae sunt. Quo itaque modo problematis naturae maxime convenit,

Digitized by Google

de iis erit disponendum, e. g. methodum minimorum quadratorum in auxilium vocando, ut hae constantes, quantum fieri liceat, aequationibus ad gradum $(m+1)^{tum}$ spectantibus satisfaciant.

Verum enim vero pro una variabili absoluta et dato valore ipsius n vel m, problemata sunt semper simpliciter determinata(1). Habetur enim

$$^{n}T^{\omega} = {}^{n}T^{1} = m+1 \text{ et } {}^{n}T^{\omega+1} - 1 = {}^{n}T^{2} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1,$$

quantitas autem $(n+1)(n+2)$ semper est numerus par, unde pro $(m+1)$ prodire debet numerus integer. Hinc pro una variabili absoluta prodit inter m et n aequatio

$$\frac{n^2+3n}{2} = m+1 \qquad \text{(IV. } g\text{)}$$

In computandis coëfficientibus functionis approximantis generaliter e re erit, omnes indeterminatos, usque dum fit eliminatio ex aequationibus (I b) vel (II b), retinere, ubi sese manifestabit, quem unitati aequalem ponere, calculi compendio conveniat.

9.

Eorum, quae articulis praecedentibus exposita sunt, geometria uberem praebet applicationem, quippe quibus omnis theoria tangentium et linearum et superficierum, saltem quoad methodum directam, nititur, et quidem casibus $\omega = 1$ et $\omega = 2$. Designante enim $z = f$ aequationem formae curvae, erit $\phi = 0$ sive $\zeta = \phi$, aequatio tangentis, quoniam, si functio ϕ formulis I. (art. 4.) vel II. (art. 6.) respondet, alia figura per aequationem $\chi = 0$ representata ad figuram propositam (f) propius accedere, sive inter eam et figuram approximantem (ϕ) transire nequit, nisi et ipsa aequationibus I. vel II. respondeat, id quod est criterium tangentium characteristicum, quod per methodum demonstrationi art. 4. analogam deducitur(2). Sint e. g. aequationes superficiei propositae et tangentis resp. $z = f(x,y)$ et

---

(1) Confer. tamen art. 10. et 11.

(2) Confer. Lagrange theorie des fonctions II. 1.-12., porro 32. sqq. et 38. sqq., praesertim in trauslatione clar. Crelle.

Digitized by Google

$$0 = \phi(x,yz) = A_{0,0,0} + A_{1,0,0}x + A_{0,1,0}y + A_{0,0,1}z + \\ + A_{2,0,0}x^2 + A_{1,1,0}xy + A_{0,2,1}y^2 + A_{1,0,1}xz + A_{0,1,1}yz + A_{0,0,2}z^2,$$

ubi cum sit $\omega = n = 2$, ex articulo praecedente iam constat, approximationem, quae in theoria tangentium *contactus* nominatur, ultra secundum gradum hoc casu ascendere non posse.

Iam sint a et b valores pro approximatione, quibus loco x et y substitutis ponatur

$$f(a,b) = c, \frac{\partial f}{\partial x} = d_{1,0}, \frac{\partial f}{\partial y} = d_{0,1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = d_{2,0}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = d_{1,1} \text{ etc.}$$

nec non indefinite valor tertiae coordinatae z ex $\phi(x,y,z) = 0$ prodiens $= \zeta$, habetur (1):

1) $$0 = c - \zeta = A_{0,0,0} + A_{1,0,0}a + A_{0,1,0}b + A_{0,0,1}c \\ + A_{2,0,0}a^2 + A_{1,1,0}ab + A_{0,2,0}b^2 + A_{1,0,1}ac + A_{0,1,1}bc + A_{0,0,2}c^2$$

2) $$0 = d_{1,0} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = d_{1,0} + \frac{A_{1,0,0} + 2A_{2,0,0}a + A_{1,1,0}b + A_{1,0,1}c}{A_{0,0,1} + A_{1,0,1}a + A_{0,1,1}b + 2A_{0,0,1}2c}$$

3) $$0 = d_{0,1} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = d_{0,1} + \frac{A_{0,1,0} + A_{1,1,0}a + 2A_{0,2,0}b + A_{0,1,1}c}{A_{0,0,1} + A_{1,0,1}a + A_{0,1,1}b + 2A_{0,0,2}c}$$

4) $$0 = d_{2,0} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = d_{2,0} + \frac{2A_{2,00} + 2A_{1,0,1}d_{1,0} + 2A_{0,0,2}d_{1,0}^2 c}{A_{0,1,0} + A_{1,0,1}a + A_{0,1,1}b + 2A_{0,2,0}c}$$

5) $$0 = d_{1,1} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = d_{1,1} + \frac{A_{1,1,0} + A_{1,0,1}d_{0,1} + A_{0,1,1}d_{1,0} + 2A_{0,0,2}d_{1,0} \cdot d_{0,1}}{A_{0,0,1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2A_{0,0,2}c} \quad (*)$$

6) $$0 = d_{0,2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = d_{0,2} + \frac{2A_{0,2,0} + 2A_{0,1,1}d_{0,1} + 2A_{0,0,2}d_{0,1}^2}{A_{0,01} + \ldots\ldots\ldots + 2A_{0,02}c}$$

---

(1) Supponendo scilicet casum communiorem, quo aequationes II. locum habere possunt, quod hic eo magis licebit, quia casus, quibus formulae generaliores applicandae sunt, in figuris curvis non nisi punctis quibusdam singularibus respondent, e. g. punctis, ubi vel angulus tangentis cum una axium coordinatarum est rectus sive nullus, vel punctis flexus contrarii, vel cuspidum.

(*) $A_{0,0,1} + \ldots\ldots + 2A_{0,0,2}$ indicat divisorem $A_{0,0,1} + A_{1,0,1}a + A_{0,1,1}b + 2A_{0,0,2}c = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$ pro $\zeta = c$.

Digitized by Google

7) $0 = d_{3,0} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = d_{3,0} + \frac{3.2 A_{0,0,2} d_{1,0} d_{2,0} + 3 A_{1,0,1} d_{2,0}}{A_{0,0,1} + \ldots\ldots\ldots + 2 A_{0,0,2}}$ (*)

8) $0 = d_{2,1} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = d_{2,1} + \frac{2 A_{1,0,1} d_{1,1} + 2 A_{0,0,2} d_{1,1} (2 d_{1,0} + d_{0,1}) + A_{0,1,1} d_{2,0}}{A_{0,0,1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 A_{0,0,2}}$

9) $0 = d_{1,2} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = d_{1,2} + \frac{2 A_{0,1,1} d_{1,1} + 2 A_{0,0,2} d_{1,1} (2 d_{0,1} + d_{1,0}) + A_{1,0,1} d_{0,2}}{A_{0,0,1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2 A_{0,0,2}}$

10) $0 = d_{0,3} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} = d_{3,0} + \frac{3.2 A_{0,0,2} d_{0,1} . d_{0,2} + 3 A_{0,1,1} d_{0,2}}{A_{0,0,1} + \ldots\ldots\ldots + 2 A_{0,0,2}}$

e quibus aequationibus primis sex ex asse, posito coëfficiente aliquo $= 1$, satisfieri oportet, quatuor vero ultimae (sc. 7 .... 10) pro arbitrio in subsidium vocari sive plane negligi possunt, dum tres constantes aliunde definuntur, quod multimodis fieri potest; e. g. statuendo: $0 = \phi(x, y, z)$ repraesentare ellipsoidem, quo casu adsunt conditiones $A^2_{1,1,0} - 4 A_{2,0,0} . A_{0,2,0} < 0$, vel $A^2_{1,0,1} - 4 A_{2,0,0} . A_{0,0,2} < 0$ vel $A^2_{0,1,1} - 4 A_{0,2,0} . A_{0,0,2} < 0$ et $A_{2,0,0} A^2_{0,1,1} + A_{0,2,0} A^2_{1,0,1} + A_{0,0,2} A^2_{1,1,0} - A_{1,1,0} . A_{1,0,1} . A_{0,1,1} - 4 A_{2,0,0} . A_{0,2,0} . A_{0,0,2} < 0$ (**) quibus, cum tres quantitates non plane iis determinentur, adiungi potest conditio, ut sit $0 = \phi(x, y z)$ superficies per rotationem orta, immo vero, ut axis per punctum aliquod datum (quippe in quo initium coordinatarum collocandum est) transeat (1), id quod duas suppeditat aequationes.

(*) Nam differentiale quodvis tertii ordinis ipsius ϕ, videlicet $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}$ etc. aequale est nihilo.

(**) Confer. Euler Introd. in analys. inf. append. §. 110. vel Biot Géométrie analytique §. 259. Conditiones illae, si aliqua quantitatum $A_{2,0,0}$, $A_{0,2,0}$, $A_{0,0,2}$ positiva accipitur, cum iis conveniunt, quae locum habere debent, ut aliqua trium variabilium functio, cuius differentialia secundi ordinis cum terminis $A_{1,0,0}$ $A_{1,1,0}$ etc. conspirant, valorem maximum minimumve capere possit. Huius vero phaenomeni ratio facile inde deprehenditur, quod utraeque conditiones eo redeunt, ut forma quaedam secundi gradus non nisi factores imaginarios primi gradus contineat, sive eius valor eodem sit signo affectus, quicunque tribuantur variabilibus valores reales. Confer cl. Dirksen *analytische Darstellung der Variationsrechnung* §. 35. et infra cap. II.

(1) Aequationes, quas Littrow *(analytische Geometrie pag.* 249. *No.* IX*)* evolvit, hunc tatnummodo casum specialem respiciunt.

Digitized by Google

Quamquam per huiusmodi conditiones ordo approximationis sive contactus non mutatur, functio tamen approximans, sive, quam indicat, figura ad functionem absolutam vel figuram respondentem eo minus accedit, quo minus aequationes ad tertium ordinem pertinentes 7. 8. 9. 10. adimpletae sunt.

10.

Quodsi de contactu linearum quaeritur, cum eo casu una tantum adsit variabilis absoluta, approximationis sive contactus ordo, quem aequatio $\frac{n^2+3n}{2} = m+1$ (art. 8. IV. g) indicat, generaliter loquendo semper stabiliri potest; erit ordo e. g. 4^{tus} pro $n=2$.

Sit x variabilis absoluta, y relativa, ac valor pro approximatione a, cui respondeat $y=b$, atque d_1, d_2 etc. valores ipsorum $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ etc. pro $x=a$, erit aequatio tangentis:

$$0 = \phi(x,y) = A_{0,0} + A_{1,0}\,x + A_{0,1}\,y + A_{2,0}\,x^2 + A_{1,1}\,xy + A_{0,2}\,y^2$$

ac $$d_1 = -\frac{A_{1,0} + 2A_{2,0}\,a + A_{1,1}\,b}{A_{0,1} + A_{1,1}\,a + 2A_{0,2}\,b}$$

et sic porro; quibus evolutis determinantur coëfficientes per aequationes sequentes:

1) $A_{0,0} + aA_{1,0} + a^2 \cdot A_{2,0} + b \cdot A_{0,1} + ab \cdot A_{1,1} + b^2 \cdot A_{0,2} = 0$
2) $A_{1,0} + 2a \cdot A_{2,0} + d_1 A_{0,1} + (b + ad_1) A_{1,1} + 2bd_1 \cdot A_{0,2} = 0$
3) $2A_{2,0} + d_2 A_{0,1} + (2d_1 + ad_2) A_{1,1} + 2(d_1^2 + bd_2) A_{0,2} = 0$
4) $d_3 A_{0,1} + (3d_2 + ad_3) A_{1,1} + 2(3d_1 d_2 + bd_3) A_{0,2} = 0$
5) $d_4 A_{0,1} + (3d_3 + ad_4) A_{1,1} + 2(3d_2^2 + 4d_1 d_3 + bd_4) A_{0,2} = 0$

ubi plerumque calculi compendio maxime inserviet vel $A_{1,1}$ vel $A_{0,2}$ supponere $= 1$.

Supra dictum est, generaliter nos gradum approximationis, quem aequatio (IV. g) indicat, ergo hic quartum assequi posse; exceptio autem huius regulae in promptu est. Quodsi enim quantitates $d_1 \ldots\ldots d_4$ infinitae evadunt, habetur

$$0 = A_{0,1} + A_{1,1}\,a + 2A_{0,2}\,b \qquad (\alpha)$$

quare, cum ex aequatione prima sequatur:

$$A_{0,0} + aA_{1,0} + a^2 A_{2,0} + b\{A_{0,1} + aA_{1,1} + bA_{0,2}\} = 0$$

Digitized by Google

simul esse debet: $A_{0,0} + aA_{1,0} + a^2A_{2,0} - b^2A_{0,2} = 0$

sive $0 = (A_{1,1}^2 - 4A_{2,0}A_{0,2})a^2 + 2(A_{1,1}A_{0,1} - 2A_{0,2}A_{1,0})a + A_{0,1}^2 - 4A_{0,0}A_{0,2}$ (β)

Quamquam vero hoc casu non aequationes II. sed generaliores I. applicandae sunt, nihilominus relationes α et β subsistunt, quae autem an cum aequatione $C_4 = \Gamma_4$, quae ad quartum approximationis gradum pertinet, consentiant nec ne, nonnisi ex speciali problematis natura diiudicare licet; sin minus, gradus iste locum habere nequit. Erroneum denique esset, putare, unam ex relationibus α et β ad determinationem coëfficientis arbitrarii adhiberi posse, ita ut quinque restent coëfficientes aliunde definiendi; nam si nullus eorum unitati aequalis ponitur, nil aliud fit, nisi quod omnes aliqua quantitate multiplicentur, quo eorum mutua relatio non mutatur.

Deinde ordo approximationis per formulas IV. indicatus eo nunquam casu obtineri potest, quo pro functione ϕ productum ex factoribus inferiorum ordinum accipitur, ita ut ϕ indefinite in tales factores resolvi queat.

Postremo omnia hoc art. dicta de lineis dupliciter curvis eodem iure valent, quippe quae tanquam duo systemata functionum absolutarum et approximantium

$$\begin{array}{ll} y = f(x) & \\ \phi(x, y) = 0 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} z = {}^1f(x) & \\ {}^1\phi(x, z) = 0 & \end{array}$$

eiusdem variabilis independentis cum eodem valore pro approximatione spectandae sunt.

11.

Hactenus de problematis in hac sectione propositi resolutione generali. Supersunt quaedam notanda de casu, quo pro valoribus extremis functionis absolutae functio approximans quaeritur. Hic tunc *limes* appellari solet, cuius manifesto duo sunt genera, prout variabilis dependens, dum ad valores suos extremos appropinquat, continuo sive crescat sive decrescat. De hoc argumento praecipue sequentia notari oportet.

I. De limite primi vel secundi generis functionis cuiusdam quaeri non potest, quoties iam pro valoribus independentium ab iis pro

Digitized by Google

approximatione (1) diversis functio valorem suum absolute maximum vel minimum attingit (2), verum enim vero maximi minimive ipsi relativi ad limitem quendam vergere possunt; e. g. proposita aequatione $z = a + \frac{b \sin x}{e^y}$, existente ipso $e > 1$, erit quantitas a ipsius z limes pro x et $y = \infty$. Pro quovis alio valore ipsius y functio $b \sin x$ obtinet valorem relative maximum statuendo $x = \frac{1}{2}\pi$; cum vero $\sin x$ unitatem superare nequeat, et $e^y = \infty$ pro $y = \infty$, erit functionis $a + \frac{b \sin x}{e^y}$ limes primi et secundi generis $= a$, prout x inter $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$ vel inter $(2n+1)\pi$ et $(2n+2)\pi$ accipitur (3).

II. Quoties de limitibus agitur, cum una pluresve independentium valorem 0 sive ∞ induunt, primo quaeri potest, an aequationes I. art. 4. adhuc locum habeant. Ponamus x recipere valorem ∞, unde in formulis art. 4. provenirent quidem expressiones uti $f(\infty + k, y)$, quibus vero evitatis manifesto nihil adest, ex quo contra hoc theorema dubium petere possit. Hunc igitur in finem si statuitur $x = \frac{1}{\xi}$, functio $f(x,y)$ transibit in aliam, ${}^1f(\xi, y)$, in qua certo ipsius ξ loco ponere licet $\xi + i$, quo facto de functionibus ${}^1f(\xi, y)$, ${}^1f(\xi + i, y)$ etc. ${}^1\phi(\xi, y)$ etc. idem erit tenendum ac supra de functionibus $f(x,y)$, $f(x+k, y)$ etc. $\phi(x,y)$ etc. et valor pro approximatione ipsius ξ erit $= 0$. Manifesto eadem, si etiam pro ipso y substituendum est $\frac{1}{\eta}$, valent, ac pro functionibus $f(x,y)$ $\phi(x,y)$ etc. tunc statim introducendae sunt ${}^1f(\xi, \eta)$, ${}^1\phi(\xi, \eta)$.

Praeterea si aliter loco aequationum II. generaliores I. applicari debuissent, ambages hinc prodeuntes per huius modi substitutiones saepius evitantur, quibus scilicet fit, ut nihilominus aequationibus II. uti possis.

---

(1) Hi valores, quibus casu, quem tractamus, valores dependentis extremi (nil interest, an finiti an infiniti) respondent, ipsi vel finiti vel infiniti esse possunt, qua de re non nisi ex functionis cuiusdam propositae natura iudicare licet. Sic in aequatione $y = \frac{a+b}{c^2 - x^2}$ ipsa y recipit valorem $= \infty$ pro $x = \pm c$, et valorem $= a$ pro $x = \pm\infty$.

(2) Excipi tamen debet casus, ubi sicuti in exemplo praecedente hi valores, absolute maximi vel minimi, ipsi sunt valores dependentis extremi, sive ubi functio plura systemata, ut ita dicam, valorum dependentis gignit.

(3) Confer infra art. 19, 3.

Digitized by Google

III. Quae articulis art. 5. et 7. de gradu approximationis exposita sunt, sine dubio de gradu sive ordine limitis non minus generaliter locum tenent, atque pro ϕ, si erit functio algebraica, functio implicita $\omega + 1$ variabilium erit accipienda. Hic vero saepius termini, qui ob maiorem coëfficientium numerum in tali forma indeterminati et pro ordine superiore approximationis plus quam determinati sunt, ex aequatione prima, scilicet $C_{0,0} = \Gamma_{0,0}$, plane reiiciendi sunt; insuper, etiamsi modo una variabilis independens adest, interdum accidit, ut ob terminos hosce reiiciendos ordinem approximationis sive limitis, quem formula $\frac{n^2+3n}{2} = m + 1$ indicat, assequi non liceat; quae exemplis infra exponendis iam clarius elucebunt.

Ceterum in theoria limitum existit casus late patens, quo pro limitibus omnem hanc disquisitionem removere et coëfficientes functionis approximantis faciliori algorithmo definire licet.

12.

Quae ut locum habeant, requiritur, I^mo^ ut f tanquam functio implicita spectata in seriem secundum dimensiones variabilium progredientem converti possit ea lege, ut summae terminorum ordinis cuiusvis seriem convergentem constituant, et, etiamsi nulli omnino variabili valor aliquis specialis tribuitur, de binis tamen quibusvis eiusmodi summis se insequentibus diiudicare liceat, an altera, dum variabiles, quibus constant, ad limitem suum convergunt, in qualibet ratione maior quam altera fieri possit. Nominemus brevitatis gratia eiusmodi membra, quae plurimum ad valorem functionis conferunt, *membra capitalia*, et terminos, qui membris hisce insunt, *terminos capitales*. Deinde II^do^ requiritur, ut functioni ϕ, elevando eam ad potentiam quandam, forma conciliari possit, quae in membris capitalibus eorumque terminis singulis, quoad exponentes earundem variabilium, quatenusque pro ordine functionis ϕ fieri licet, cum functione f conspiret.

His enim positis, facile intelligitur, inter omnes functiones eiusdem ordinis n functionem ϕ ad illam f maxime accedere, sive esse

Digitized by Google

limitem summi gradus pro facultate ipsius ϕ, si huius coëfficientes ita determinantur, ut termini capitales utriusque evolutionis identici evadant, id quod iisdem ac aequationes I. et II. nititur principiis. Vice versa elevando functionem f ad potentiam fractam interdum ei forma tribui potest cum gentilina ipsius ϕ quoad terminos capitales conspirans. Quod vero cum irrationalitas, et disquisitiones difficiliores de convergentia seriei hinc oriundae valde intricatum reddant, methodus prior, scilicet per elevationem ipsius ϕ, saepius hac applicanda erit, qua ceterum Cl. Biot in asymptotas hyperbolae inquirens utitur.

Immo si determinatione ista coëfficientium uti nolis, methodus tamen eo facit, ut forma vera ipsius ϕ innotescat, id est, ut cognoscatur, quinam termini ex forma generali n^{ti} ordinis reiiciendi sint.

Haud raro quidem valores coëfficientium hinc prodeuntes duplici signo $\pm$ affecti erunt. Utrum vero eligendum, plerumque sine negotio ea lege definitur, ut valores dependentium ex utraque functione provenientes idem signum habeant.

Quodsi crescente variabili quadam aliae decrescunt, sive contra, in evolutione functionum f et ϕ termini occurrent, qui ad expressionem $\frac{0}{0}$ appropinquant, de quibus ergo, an membris capitalibus adnumerandi sint nec ne, incertum erit. Hi vero termini saepissime removentur ope substitutionum art. praec. indicatarum, scilicet ponendo $x = \frac{1}{\xi}$, atque multiplicando deinde totam expressionem per summam, quae illius denominatoribus inest, potestatem ipsius ξ. Hinc quidem ordo functionis ϕ adeo ad duplo maiorem, puta $2n^{tum}$ (quia aequatio $x = \frac{1}{\xi}$ sive $x\xi = 1$ est revera secundi gradus) augeri potest, sed nihil id refert, quoniam numerus coëfficientium inde non augetur, ac, si peracto calculo restituitur $\xi = \frac{1}{x}$, ordo prior redibit.

Denique notandum est, ordinis nullius limitem saepius sine ullo calculo constare, de quo aequatio $z = a + \frac{b \sin x}{c^x}$ (art. 11.) iam praebuit exemplum. Similiter proposita aequatione:

Digitized by Google

$$z = A_{0,0} + \frac{A_{1,0}}{x} + \frac{A_{2,0}}{x^2} + \frac{A_{3,0}}{x^3} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{A_{0,1}}{x^2} + \frac{A_{1,1}}{xy} + \frac{A_{2,1}}{x^2y} + \ldots\ldots,$$
$$+ \frac{A_{0,2}}{y^2} + \frac{A_{1,2}}{xy^2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{A_{0,3}}{y^3} + \ldots\ldots$$
$$+ \text{etc.}$$

patet, quantitatem $A_{0,0}$ pro crescentibus x et y esse ipsius z limitem constantem sive ordinis nullius, excepto tamen casu eo, quo series in infinitum excurrunt, simulque coëfficientes $A_{1,0}$ etc. sive toti sive quaedam eorum partes seriem hypergeometricam, quae non nisi numeros unitate maiores recipit, coustituunt e. g. $A_{\mu,0} = 1.3.5\ldots(2\mu-1)$, $A_{0,\nu} = 2.4.6\ldots$ $\ldots 2\nu$, $A_{\mu,\nu} = 1.3\ldots(2\mu-1).2.4\ldots 2\nu$, vel $A_{\mu,\nu} =$ producto ex numeris μ^{to} et ν^{to} Bernoulliauo, vel $A_{\mu,\nu} = a^{\mu+\nu}$ existente $a > 1$.

Postremo absque ulla investigatione ulteriori limitem ordinis nullius existere, certiores sumus, quoties constat, differentias inter binos valores consecutivos variabilis dependentis continuo eodem signo affectus decrescere, dum vel semper crescunt, vel semper decrescunt independentes, et hisce positis $= \infty$ vel $= 0$ dependentem non abire in infinitum.

13.

Quodsi praecedentia ad geometriam applicantur, perspicuum est, ϕ indicare limitem geometricum, ad quem constructio functionis absolutae f vergit, id est: figuram eius asymptoticam. Hinc ad illustrandum articulum praecedentem duo exempla geometrica adiungamus, quae insuper erit occasio de methodo cl. Euler in investigandis curvarum asymptotis, sive generalius de limitibus functionum unius variabilis quaedam in medium proferre.

Primo quaeratur limes sive asymptota primi gradus curvarum secundi gradus. Sit itaque

$$\phi(x, y) = 0 = ax + by + c, \qquad (1, a)$$
$$f(x) \quad = y = \sqrt{px + (e^2 - 1)x^2} \qquad (1, b)$$

Digitized by Google

qua aequatione, indicante p parametruum et e excentricitatem (1) omnes secundi ordinis curvae representantur.

Cum ipsae x et y simul aequales fiant nihilo, de limite secundi generis (sive versus nihilum) sermo esse non potest. Respectu alterius generis primo quaeritur, an y obtineat valorem maximum absolutum pro valore aliqno ipsius x diverso ab eius valore pro approximatione. Cum ex aequatione $\frac{\partial y}{\partial x} = 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p + 2(e^2-1)x}{\sqrt{px+(e^2-1)x^2}}$ prodeat $x = \frac{-p}{2(e^2-1)}$ et $y = \sqrt{\frac{-p^2}{4(e^2-1)}}$, sequitur, pro $e^2 < 1$ absolute maximum ipsiùs y valorem adesse, quippe pro quo habetur $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{p}$. Investigemus igitur limitem pro $e \geqq 1$ statuendo $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{1}{\eta}$ unde aequationes (1) transibunt in:

$$\xi^2 - (e^2-1)\eta^2 - p\xi\eta^2 = 0 \qquad (2)$$

et

$$\phi = a\eta + b\xi + c\xi\eta = 0$$

atque prodit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} &= \frac{1}{\sqrt{p\xi+(e^2-1)}} - \frac{p\xi}{2(p\xi+e^2-1)^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{b+c\eta}{a+c^2\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} = -\frac{b}{a} \\ \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} &= -\frac{p}{(p\xi+e^2-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{p^2\xi}{(p\xi+e^2-1)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2c\frac{\partial\eta}{\partial\xi}}{a+c\xi} = \frac{-p}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}} = +\frac{2bc}{a^2} \end{aligned}\right\} \text{ pro } \xi=\eta=0 \quad (3)$$

Itaque pro $e = 1$ est $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} = \infty$, unde, cum pro $\xi = \eta = 0$ esse debeat ${}^1f\xi = {}^1\phi\xi$ (art. 11.), sequitur theorema notum, parabolam, quippe cui respondet pro $e = 1$ aequatio $(1, a)$, ad lineam infinite remotam et axi paralellam, sive cursum parabolae ad paralellismum cum axi magis magisque convergere.

Pro $e > 1$ vero fit per aequationes 2 et 3:

$$\eta - \frac{\xi}{\sqrt{e^2-1}} + \frac{p}{2(e^2-1)}\xi\eta = 0$$

sive

$$x - \frac{y}{\sqrt{e^2-1}} + \frac{p}{2(e^2-1)} = 0$$

sive

$$y = x\sqrt{e^2-1} + \frac{p}{2\sqrt{e^2-1}},$$

---

(1) Secundum scilicet morem astronomiae recentioris.

Digitized by Google

quae est aequatio asymptotae hyperbolae, abscissis ex vertice computatis, positisque axe maiori $= a$, minori $= b$, formam communem induit

$$y = \frac{b}{a}\, x + b.$$

Quod si ad determinandos coëfficientes functionis ϕ methodo articuli 12. uti velis, perinde aequationes (1) atque (2) adhibere poteris, quia x et y simul crescunt. Hinc habetur

ex (1)	ex (2)
$y^2-(e^2-1)x^2-px=0$	$\xi^2-(e^2-1)\eta^2-p\xi\eta^2=0$
$(by=-ax-c)$	$(b\xi=-a\eta-c\xi\eta)$
$b^2y^2-a^2x^2-2acx-c^2=0$	$b^2\xi^2-a^2\eta^2-2ac\xi\eta^2-c^2\xi^2\eta^2=0$
$b=1,\ a=\pm\sqrt{e^2-1},\ 2ac=p$	$b=1,\ a=\pm\sqrt{e^2-1},\ 2ac=p$

Signa coëfficientium facile eruuntur; nam cum in aequationibus (1) et (2) quantitates y et η cum ipsis x et ξ sunt homogeneae (quoties radices positivae accipiuntur), patet in formulis $y = -\frac{(ax+c)}{b}$ (1) et $\eta = -\frac{b\xi}{a+c\xi}$ (2) necessario etiam $-\frac{b}{a}$ quantitatem positivam esse, unde sequitur

$$a = -\sqrt{e^2-1} \quad \text{et} \quad c = -\frac{p}{2\sqrt{e^2-1}}$$

atque hinc

$$y = x\sqrt{e^2-1} + \frac{p}{2\sqrt{e^2-1}},$$

id quod supra invenimus.

14.

Secundum praebeat conchois exemplum, dum quaeratur limes secundi ordinis maxime appropinquans.

Distet conchoidis centrum, quod sit initium coordinatarum, a vertice et polo resp. lineis a et b, ita ut sit $(a+b)$ distantia poli a vertice remotissimo, versus quem abscissae x positivae accipiuntur. Quibus positis est aequatio conchoidis

$$x^4 + x^2y^2 + 2bx^3 - (a^2-b^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0\ (*) \qquad (1)$$

(*) Cl. *Schmidt's Anfangsgründe der Mathematik 3r Theil 1ste Abtheiluug.* §. 199. Euler introd. II. §. 520.

Digitized by Google

Sit porro aequatio generalis sectionis conicae

$$\phi(x,y) = 0 = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

Cum sit per (1)

$$y = \frac{\sqrt{\{a^2b^2 + 2a^2bx + (a^2-b^2)x^2 - 2bx^3 - x^4\}}}{x}, \qquad (1\,a)$$

facile perspicitur, omnes quotientes differentiales fieri $= \infty$ pro $x = 0$, quam ob rem statuatur $y = \frac{1}{\eta}$, unde erit pro conchiode:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\{a^2b^2 + 2a^2bx + (a^2-b^2)x^2 - 2bx^3 - x^4\}}}, \qquad (3)$$

pro sectione conica:

$$Ax^2 + B\frac{x}{\eta} + \frac{C}{\eta^2} + Dx + \frac{E}{\eta} + F = 0 \qquad (4)$$

Ex formula (3) elucet, ipsos x et η simul aequales fieri nihilo; formula (4) autem praebet:

$$\eta^2(Ax^2 + Dx + F) + \eta(Bx + E) = -C$$

sive $$\eta = -\frac{Bx+E}{2(Ax^2+Dx+F)} \pm \sqrt{\left\{-C + \frac{1}{4}\left(\frac{Bx+E}{Ax^2+Dx+F}\right)^2\right\}} \qquad (5)$$

itaque pro $x = \eta = 0$

$$0 = -\frac{E}{2F} \pm \sqrt{\left\{-C + \frac{E^2}{4F^2}\right\}};$$

unde sequitur $C = 0$. Cum vero posito $C = 0$, formula (5) omnino daret $\eta = 0$, quoties radix positiva acciperetur, perspicuum est, negativam esse sumendam, unde habetur $\eta = -\left(\frac{Bx+E}{Ax^2+Dx+F}\right)$. Hac autem in aequatione, ut pro $x = 0$ fiat $\eta = 0$, certo supponendum est $E = 0$, unde pro sectione conica statui oportebit aequationem:

$$\eta = -\frac{Bx}{Ax^2+Dx+F} \qquad (6)$$

atque ex formula generaliori (2) plane reiiciendi sunt termini Cy^2 et Ey.

Statuamus deinde brevitatis gratia:

$$a^2b^2 + 2a^2bx + (a^2-b^2)x^2 - 2bx^3 - x^4 = Q$$

et

$$Ax^2 + Dx + F = q;$$

quo facto erit:

Digitized by Google

pro conchoide.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = + \frac{1}{Q^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{2}\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2}\frac{\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}}{Q^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{3}{4}x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}{Q^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = - \frac{\left(\frac{3\partial^2 Q}{2\partial x^2} + \frac{x}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)}{Q^{\frac{3}{2}}} + \frac{\left(\frac{9}{4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \frac{3}{2}x\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)}{Q^{\frac{5}{2}}} - \frac{\frac{1.3.5}{2.2.2}x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^3}{Q^{\frac{7}{2}}}$$ (*)

pro sectione conica.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = - \frac{B}{q} + \frac{Bx(2Ax+D)}{q^2}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{2B(2Ax+D)+Bx.2A}{q^2} + \frac{2Bx(2Ax+D)^2}{q^3}$$

$$\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = \frac{6AB}{q^2} - \frac{6B(2Ax+D)^2+12BAx(2Ax+D)}{q^3} + \frac{6Bx(2Ax+D)^3}{q^4}$$

ergo pro $x = \eta = 0$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{ab} = -\frac{B}{F}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\frac{2}{ab^2} = \frac{2BD}{F^2}, \quad \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = -3\left(\frac{a^2-b^2}{a^3b^3}\right) + \frac{9}{ab^3} = 6\frac{AB}{F^2} - 6\frac{BD^2}{F^3}$$

unde sequitur:

$$C = 0, \; E = 0, \; \frac{F}{B} = -ab, \; \frac{D}{B} = -a, \; \frac{A}{B} = \frac{b}{2a},$$

atque restituto $\frac{1}{\eta} = y$,

$$y = \frac{\frac{b}{2a}x^2 + ax + ab}{x} = -\frac{Ax^2 + Dx + F}{Bx} \qquad (7);$$

quae est aequatio hyperbolae, cuius altera asymptota cum axe ipsarum y identica est. Huius deinde hyperbolae natura ut plane innotescat, duae viae patent. Nam 1) cum sit alterius asymptotae aequatio: $y = -\frac{b}{2a}x + a$, itaque centrum hyperbolae in axe ipsarum y situm quantitate a distet ab initio coordinatarum, hinc licet deducere coordinatas verticis hyperbolae duasque quantitates eius naturam determinantes, pro quibus, ut ultimae expressiones brevissimae evadant, parameter et excentricitas accipiantur. Vel 2) coordinatae aequationis (7) ita immutari possunt, ut novis $\overset{1}{x}, \overset{1}{y}$ hyperbola exprimatur per aequationem:

$$\overset{1}{y}^2 = p\overset{1}{x} + (e^2 - 1)\overset{1}{x}^2.$$

Prior methodus quamquam minus elegans aliquanto tamen brevior est.

(*) Signa iis, quibus affecti sunt ipsi $Q^{\frac{1}{2}}$, $Q^{\frac{3}{2}}$ etc., contraria adhibere debent, si in aequatione tertia radix negativa consideratur.

Digitized by Google

Quae supra methodo generaliori sunt deducta, per illam articulo 12 expositam breviori calculo obtinere licuisset, ponendo vel $y=\frac{1}{\eta}$ vel $x=\frac{1}{\xi}$. Pro $y=\frac{1}{\eta}$ habemus per aequationem (6):

$$F^2\eta^2 - B^2x^2 + 2DFx\eta^2 + (D^2+2AF)x^2\eta^2 + 2ADx^3\eta^2 + A^2x^4\eta^2 = 0$$

sive

$$\frac{F^2}{B^2}\eta^2 - x^2 + 2\frac{DF}{B^2}x\eta^2 + \left(\frac{D^2}{B^2}+2\frac{AF}{B^2}\right)x^2\eta^2 + 2\frac{AD}{B^2}x^3\eta^2 + \frac{A^2}{B^2}x^4\eta^2 = 0;$$

aequatio (3) autem praebet:

$$a^2b^2\eta^2 - x^2 + 2a^2bx\eta^2 + (a^2-b^2)x^2\eta^2 - 2bx^3\eta^2 - x^4\eta^2 = 0 \quad (8);$$

unde prodit:

$$\frac{F}{B} = \pm ab,\ \frac{D}{B} = \pm a,\ \frac{A}{B} = \pm\frac{b}{2a},$$

in quibus facile intelligitur signa inferiora accipienda esse, ut quantitas η eodem signo in utraque functione sit affecta, quod eo redit quantitatem B negativam statuere, quoties A, D, F positivae sunt acceptae.

Ponendo $x=\frac{1}{\xi}$, ex functione absoluta prodit:

$$a^2b^2\xi^4 - y^2\xi^2 + 2a^2b\xi^3 + (v^2-b^2)\xi^2 - 2b\xi - 1 = 0.$$

Ex functione vero approximante, quae nunc fit

$$\frac{A}{B} + \frac{D}{B}\xi + \frac{F}{B}\xi^2 = -y\xi,$$

obtinetur quadrando:

$$\frac{F^2}{B^2}\xi^4 - y^2\xi^2 + 2\frac{DF}{B^2}\xi^3 + \left(\frac{2FA}{B^2}+\frac{D^2}{B^2}\right)\xi^2 + 2\frac{AD}{B^2}\xi + \frac{A^2}{B^2} = 0,$$

unde comparatis eorundem terminorum (1) coëfficientibus, habitaque de signo ipsius y pro $\xi=\infty$ debita ratione, uti supra prodibit:

$$\frac{F}{B} = -ab,\ \frac{D}{B} = -a,\ \frac{A}{B} = +\frac{b}{3v}.$$

15.

E praecedentibus exemplis elucet, plane eodem redire, limitem cuiusdam ordinis atque eiusdem ordinis asymptotam quaerere, simulque patet huius asymptotae vel limitis aequationem factorem membrorum

---

(1) Incipiendo scilicet a capitalibus ad sinistram positis.

Digitized by Google

capitalium functionis absolutae, si utraque functio nihilo aequatur, esse posse. Theorema vero:

> designante $f = 0$ aequationem duarum variabilium algebraicam ordinis n^{ti}, hanc nullum habere limitem sive potius functionem limitantem, vel curvam hac aequatione expressam nullas habere asymptotas, quoties complexus terminorum n^{tae} (altissimae) dimensionis in factores reales resolvi nequeat,

cl. Euler(1) ea demonstratione stabilire voluit, ut, supposito, complexum terminorum n^{tae} dimensionis involvere non alios factores nisi formae $a^2 x^2 - 2 ab xy \cos\psi + b^2 y^2$, ac statuendo aut x aut y aut utramque $= \infty$, termini isti capitales vel ∞^2 vel immo altiores potestates infiniti includerent, quae nec ipsi infinito (2) nec nihilo aequales esse possent.

Verum enim vero nostra quidem opinione haec demonstratio non omni rigore gaudet, cum valde sit dubitandum, an de potestatibus infiniti eodem modo quo de quantitatibus, quae proprie dicuntur, sive de quantitatibus finitis loqui liceat. Hinc accuratiorem hanc adstruamus theorematis propositi demonstrationem.

Primo patet, functionem f, si tota per formam primi gradus $ax + by + c$ divisibilis esset, valorem realem ipsius y pro quolibet ipsius x suppeditare, quia aequatio

$$ax + by + c = 0$$

talem praebet. Cuius vero bini termini $ax + by$ tunc etiam factores sunt complexus terminorum n^{tae} dimensionis functionis f (quem complexum brevitatis gratia *membrum summum* appellare licebit), uti multiplicando formam completam ordinis $(n-1)^{ti}$ et duos variabiles includentem per factorem $ax + by + c$, facile intelligitur. Quodsi igitur membrum summum non nisi factoribus imaginariis constat, certo nulla forma realis primi gradus existit, qua tota functio sit divisibilis, ergoque ex eiusmodi factoribus nullus ipsius y valor realis deduci poterit.

---

(1) Introductio in Analysin etc. P. II. cap. VII. §. 167.

(2) Nam eo casu in aequatione $f = 0$ plura inferiorum ordinum membra in infinitum abire et hinc ipsae expressiones uti ∞, ∞^2 etc. oriri possunt.

Digitized by Google

16.

Sed rarissimo evenit, ut tota quaedam functio completa n^{ti} ordinis duarum variabilium factores inferioris gradus vel reales vel imaginarios involvat (1). Quo casu, quamquam argumentatio art. praec. locum

---

(1) Duae enim solae existunt functionum species, quas semper in factores vel reales vel imaginarios dissolvere licet; sunt nempe functiones unius variabilis et homogeneae duarum; reliquae vero functiones, praesertim completae duarum pluriumve variabilium, generaliter dissolvi nequeunt. Schema enim generale huiusmodi functionis est:

$$\begin{aligned} &ax^n + \overset{1}{a}x^{n-1}y + \overset{2}{a}x^{n-2}y^2 + \overset{3}{a}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots + \overset{n}{a}y^n \\ &\quad + \overset{1}{b}x^{n-1} + \overset{1}{b}x^{n-2}y + \overset{2}{b}x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots\ldots + \overset{n-1}{b}y^{n-1} \\ &\qquad + cx^{n-2} + \overset{1}{c}x^{n-3}y + \ldots\ldots\ldots + \overset{n-2}{c}y^{n-2} \\ &\qquad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + ux + \overset{1}{u}y + \mathrm{K} = 0, \end{aligned} \qquad (a)$$

unde statuto $x = \xi y$, prodit forma

$$\begin{aligned} &y^n\left\{a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \overset{2}{a}\xi^{n-2} + \overset{3}{a}\xi^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overset{n}{a}\right\} \\ &\quad + y^{n-1}\left\{b\xi^{n-1} + \overset{1}{b}\xi^{n-2} + \overset{2}{b}\xi^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overset{n-1}{b}\right\} \\ &\qquad + y^{n-2}\left\{c\xi^{n-2} + \overset{1}{c}\xi^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overset{n-2}{c}\right\} \\ &\qquad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + y\left\{u\xi + \overset{1}{u}\right\} + \mathrm{K} = 0 \end{aligned} \qquad (b)$$

quam certo pro quovis ipsius ξ valore tanquam functionem unius variabilis spectare licet. Quod autem ut indefinite fieri possit, requiritur, ut sit

$$\frac{b\xi^{n-1} + \overset{1}{b}\xi^{n-2} + \ldots\ldots + \overset{n-1}{b}}{a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \overset{2}{a}\xi^{n-2} + \ldots\ldots + \overset{n}{a}} = \text{summae singularum radicum},$$

$$\frac{c\xi^{n-2} + \overset{1}{c}\xi^{n-3} + \ldots\ldots + \overset{n-2}{c}}{a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \overset{2}{a}\xi^{n-2} + \overset{3}{a}\xi^{n-3} + \ldots\ldots + \overset{n}{a}} = \left\{\begin{array}{l}\text{summae productorum}\\ \text{e binis radicibus},\end{array}\right.$$

$$\frac{d\xi^{n-3} + \ldots\ldots + \overset{n-3}{d}}{a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \overset{2}{a}\xi^{n-2} + \overset{3}{a}\xi^{n-3} + \ldots\ldots + \overset{n}{a}} = \left\{\begin{array}{l}\text{summae productorum}\\ \text{e ternis},\end{array}\right.$$

etc. etc.

Digitized by Google

non habeat, e factoribus tamen membri summi valores ipsius y prodibunt, ad quos unus ex valoribus, quos $f=o$ suppeditat, crescente ipso x magis magisque appropinquat, unde sequitur, si isti factores omnes

---

quibus conditionibus simul omnibus ea lege satisfieri nequit, ut ipsum ξ remaneat indefinitum, quod enim, etsi pro prima, resolvendo quantitatem

$$\frac{b\xi^{n-1}+\overset{1}{b}\xi^{n-2}+\ldots.+\overset{n-1}{b}}{a\xi^{n}+\overset{1}{a}\xi^{n-1}+\ldots.+\overset{n}{a}}$$

in fractiones simplices effici potest, tamen non sequitur, hasce, quae singulae radices essent, reliquis conditionibus respondere. Id iam apparet ponendo $n=2$, quo facto prodit

$$y^2(a\xi^2+\overset{1}{a}\xi+\overset{2}{a})+y(b\xi+\overset{1}{b})+c=0$$

$$\text{sive}\quad y^2+y\,\frac{\left(\frac{b}{a}\xi+\frac{\overset{1}{b}}{a}\right)}{\xi^2+\frac{a^2}{a}\xi+\frac{a^2}{a}}+\frac{\frac{c}{a}}{\xi^2+\frac{\overset{1}{a}}{a}\xi+\frac{\overset{2}{a}}{a}}=0,$$

atque hinc resolvendo in fractiones simplices:

$$\frac{2a\overset{1}{b}-b\overset{1}{a}+b\sqrt{\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}}}{2a\sqrt{\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}}\left\{\xi+\frac{\overset{1}{a}+\sqrt{\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}}}{2a}\right\}}\quad\text{et}\quad\frac{2a\overset{2}{b}-b\overset{1}{a}-b\sqrt{\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}}}{-2a\sqrt{\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}}\left\{\xi+\frac{\overset{1}{a}-\sqrt{\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}}}{2a}\right\}}$$

Secunda vero conditio infert:

$$\frac{a^2\overset{1}{b}^2-a\overset{1}{a}b\overset{1}{b}+a\overset{2}{a}b^2}{-a^2(\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a})\left\{\xi^2+\frac{\overset{1}{a}}{a}\xi+\frac{\overset{2}{a}}{a}\right\}}=\frac{c}{(a\xi^2+\overset{1}{a}\xi+\overset{2}{a})}=\text{producto harum fractionum,}$$

unde resultat aequatio conditionalis:

$$a\overset{1}{b}^2+\overset{1}{a}^2c+\overset{2}{a}b^2-4a\overset{2}{a}c-\overset{1}{a}b\overset{1}{b}=0$$

cui manifesto non nisi casu specialissimo quantitates $a\overset{1}{a}\ldots.$, $b\overset{1}{b}\ldots.$, etc. satisfacient. Quo existente insuper in Geometria, prout habetur simul $\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}<0$ vel >0, aequationes pro ellipsi et hyperbola unum punctum vel lineam rectam exhibent (Biot Geom. 232 et 244), qua in re differentia inde oritur, quod existente $\overset{1}{a}^2-4a\overset{2}{a}<o$ radices aequationes $a\xi^2+\overset{1}{a}\xi+\overset{2}{a}=o$ fiant imaginariae.

Facile denique perspicitur, si functio $f=o$ in factores formae $\alpha x+\beta y+\gamma$ resolvi potest, tunc systema quoddam valorum ipsius y ex $f=o$ deductum cum iis, quos $\alpha x+\beta y+\gamma=o$ suppeditaret, plane congruere, ideoque per lineam rectam repraesentari posse.

Digitized by Google

sunt imaginarii, certo valorem quendam ipsius x existere, ultra quem, si crescit haec variabilis, aequatio $f = o$ non nisi valores imaginarios produceret.

Quo autem clarius eluceat, factores membri summi valores approximantes ad eos, qui ex $f = o$ nascuntur, praebere, distinguendum quidem est, pro permagnis saltem independentis x valoribus an crescente ipsa x secundum functionis f naturam quantitas dependens y simul crescat, an decrescat. Sed quoniam introducendo angulum arbitrarium vel substitutione $y = \frac{1}{\eta}$ casus secundus ad priorem reduci potest, sufficiet hunc solum perpendere.

Sit $x = \xi y$, erit aequationis n^{ti} gradus inter duas variabiles schema generale:

$$f = y^n(a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \overset{2}{a}\xi^{n-2} + .. + \overset{n}{a}) + y^{n-1}(b\xi^{n-1} + \overset{1}{b}\xi^{n-2} + .. + \overset{n-2}{b}) + y^{n-2}(c\xi^{n-2} + \overset{1}{c}\xi^{n-3} + .. + \overset{n-3}{c}) + .. + K = o \quad (1)$$

Cum non nisi in aequationibus primi gradus incrementa variabilium sint inter se proportionalia, in aequatione n^{ti} ordinis altera variabilis magis quam altera crescit. Quamobrem statuamus, quantitatem x magis crescere quam y, unde pro magnis certe variabilium valoribus erit $\xi > 1$. Quare cum membrum summum solum id sit, quod terminum $y^n \xi^n$ contineat, ac crescente ξ ob aequationem $x = \xi y$ et $\xi > 1$ ipsa y crescat, patet, valorem ipsius ξ tantum accipi posse, ut membrum summum summam omnium reliquorum quavis quantitate superet; ideoque aequationes

$$y^n(a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \ldots\ldots + \overset{n}{a}) = o \quad (2)$$

sive

$$a x^n + \overset{1}{a} x^{n-1} y + \overset{2}{a} x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + \overset{n}{a} y^n = o$$

valores pro variabili y suppeditabunt, ad quos unus saltem eorum, qui ex aequatione $f = o$ nascuntur, perpetuo crescente variabili x magis magisque verget. Aequationibus (2) autem, quarum $\alpha\xi - \beta$ vel $\alpha x - \beta y$ sit radix aliqua, satisfit formulis:

$$\alpha\xi - \beta = o \text{ sive } \alpha x - \beta y = o \quad (3)$$

e quibus igitur cum pro quantocunque ipsius x vel ξ valore realis etiam ipsius y enascatur, et ex aequationibus (2) et hinc ex aequatione (1)

Digitized by Google

realis ipsius y valor pro satis magnis alterius variabilis oriri potest. Quodsi vero aequationes (3) omnesque iis similes non nisi valores imaginarios dependentis y gignunt, eodem modo ratiocinando sequitur, valores quantitatis x vel ξ tantos accipi posse, ut valores ipsius y omnes ex $f=o$ nati, ad quorum quemlibet unus ex systemate aequationum, cuiusmodi sunt ipsae (3), appropinquat, et ipsi fiant imaginarii, ergoque ad limitem reales valores suppeditantem accedere nequeant, unde pro valoribus extremis absolutae variabilis existit functio ad eiusmodi functionem approximans nulla.

Ratiocinatio praecedens eo nititur, quod in functione absoluta summa potestas ipsius x adsit, quae contra si deesset, facile introduci poterit ponendo: $x = \overset{1}{x}\cos\psi - \overset{1}{y}\sin\psi$, $y = \overset{1}{x}\sin\psi + \overset{1}{y}\cos\psi$, ita ut coëfficiens ipsius x^n differat a ciffra; unde orietur functio absoluta priori aequivalens, quippe quae eandem curvam repraesentat. Generaliter nullum est dubium, quin tali substitutione facta, pro functione incompleta completa erui possit.

17.

Superest, ut methodus, quam cl. Euler theoremate art. 15. nisus, in investigandis asymptotis adhibuit, breviore fortasse modo explicetur, quo facto deinde eam cum illa, quae superioribus articulis proposita est, comparare licebit.

Methodus clarissimi autoris, qua ad eruendam functionem approximantem ex factoribus membri summi inter se inaequalibus utitur, eo redit, ut quaeratur limes constans sive ordinis nullius, ad quem membra subsequentia divisa per reliquos factores membri summi accedant, postquam divisione aut multiplicatione necessaria per potestatem factoris primi gradus $\mu x + \nu y$ facta ad dimensionem nullam reducta sunt, ut evitentur expressiones in infinitum excurrentes ex illa divisione per reliquos factores orturae.

Sit membrum summum $= P$, summa terminorum sive membrum $(n-1)^{tae}$ dimensionis $= Q$ etc., $a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \ldots \overset{n}{a} = P^1$, $b\xi^{n-1} + \overset{1}{b}\xi^{n-2} + \ldots + \overset{n-1}{b} = Q^1$ etc., deinde ipsius P factores simplices $\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y$, $\overset{2}{\alpha}x - \overset{2}{\beta}y$, ... $\overset{n}{\alpha}x - \overset{n}{\beta}y$,

Digitized by Google

quibus etiam nonnulli imaginarii interesse possunt; statuamus, primum nempe $\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y$ sive $\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}$ esse realem et

$$\frac{P}{\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y} = M, \text{ ac } \frac{P^1}{\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}} = M^1.$$

Hinc erit:

$$o = f = P + Q + R + S + \ldots\ldots \quad (4)$$

$$P = y^{\nu} P^1, \; Q = y^{\nu-1} Q^1, \; R = y^{\nu-2} R^1, \text{ etc.} \quad (5)$$

$$M = (\overset{2}{\alpha}x - \overset{2}{\beta}y)(\overset{3}{\alpha}x - \overset{3}{\beta}y) \ldots\ldots (\overset{n}{\alpha}x - \overset{n}{\beta}y), \quad (6)$$

$$M^1 = (\overset{2}{\alpha}\xi - \overset{2}{\beta})(\overset{3}{\alpha}\xi - \overset{3}{\beta}) \ldots\ldots (\overset{n}{\alpha}\xi - \overset{n}{\beta}) = \frac{M}{y^{\nu-1}}, \quad (7)$$

I. Quibus positis functio limitans sive asymptota primi gradus, quae ex factore $\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y$ sive $\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}$ demanat, obtinetur, si in quantitate M^1 valor ipsius ξ ex aequationibus (3) (art. praec.) substituitur; quo facto, si ponitur $\frac{Q}{M^1} = p$, erit functio quaesita:

$$y(\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}) + p = 0$$

sive

$$\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y + p = 0. \quad (8)$$

Haec functio ex omnibus aliis primi gradus ad functionem f proxime accedit; nam, uti ex art. 15. constat, systema quoddam valorum ipsius y ex aequatione $f = 0$ derivatum cum valoribus, quos aequationes (8) pro y praebent, plane congrueret, si functio f universa per $\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y + p$ sive per $y + \frac{P}{\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}}$ divisibilis esset. Quae autem divisio quo minus (sc. absque residuo) peragi possit, non nisi membra ipso Q inferiora impediunt, quia tam quantitas $\frac{P}{\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}}$ quam fractio simplex, cuius denominator $= \overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}$, ex fractione $\frac{P^1}{Q^1}$ eadem prorsus methodo derivantur, quippe quae eo redit, ut reiecto ex ipso P, factore $\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}$, et in reliquis factoribus et in ipso Q, (sive in fractione $\frac{Q^1}{M^1}$) ponatur $\xi = \frac{\overset{1}{\beta}}{\overset{1}{\alpha}}$; unde sequitur, quod ad membra *altissima* P et Q attineat, expressionem $\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y + p$ tanquam factorem totius functionis f spectari posse, sive functionem n^{ti} ordinis, quoad membra P et Q cum ipsa f conspirantem, sed factorem $\overset{1}{\alpha}x - \overset{1}{\beta}y + p$ involventem nonnisi membris inferioribus, puta R, S etc., ab ipsa f discrepare (1).

---

(1) Vid. nota (2) art. 16.

Digitized by Google

Denique nullo negotio intelligitur, substitutionem valoris ipsius ξ ex aequatione $\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta} = 0$ identicam esse cum ea cel. Euler, puta $\frac{y}{x} = \frac{\overset{1}{\alpha}}{\overset{1}{\beta}}$ sive $y = \overset{1}{\alpha}$, $x = \overset{1}{\beta}$ in fractione $\frac{Q}{M}$.

Membra aequationis (4) reliqua non considerantur, quia fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$ etc. sive $\frac{R^1}{M^1}$, $\frac{S^1}{M^1}$ sunt dimensionis -1, -2 etc. respectu ipsius ξ, ergo crescente hac quantitate ad nihilum vergunt; $\frac{Q^1}{M^1}$ vero cum sit nullius dimensionis, versus quantitatem constantem appropinquat (1).

Hanc ob causam existente $Q = 0$ erit etiam $p = 0$, nec approximatio simili substitutione in reliquis membris facta augeri potest, quod insuper omni rigore hoc modo demonstrare licet. Si Q evanescit, aequatio (1) facili transpositione mutatur in

$$0 = f = y + \frac{y^{n-2}\left(c\xi^{n-2} + \overset{1}{c}\xi^{n-3} + \ldots + \overset{n-2}{c}\right) + y^{n-3}\left(d\xi^{n-3} + \overset{1}{d}\xi^{n-4} + \ldots + \overset{n-3}{d}\right) + \ldots\ldots + K = 0}{\left(a\xi^n + \overset{1}{a}\xi^{n-1} + \overset{2}{a}\xi^{n-2} + \ldots + \overset{n}{a}\right)}$$

sive $$0 = y^n + y^{n-1} \cdot \frac{R^1}{P^1} + y^{n-2} \cdot \frac{S^1}{P^1} + \ldots\ldots + \frac{K}{P^1}.$$

Quae si tanquam aequatio solius y consideratur, coëfficiens $\frac{R^1}{P^1}$ manifesto est summa productorum e binis radicibus. Sint istae radices $\frac{p_1}{\overset{1}{\alpha}\xi - \overset{1}{\beta}}$, $\frac{p_2}{\overset{2}{\alpha}\xi - \overset{2}{\beta}}$ etc., sive brevius $\frac{p_1}{v_1}$, $\frac{p_2}{v_2}$ etc., sit porro horum productorum summa $= \overset{2}{C}\left|\frac{p_1}{v_2}\right|$, et exclusis productis, quae radicem $\frac{p_1}{v_1}$ implicant, $= \overset{2}{C}\left|\frac{p_2}{v_2}\right|$, simili deinde modo $\overset{1}{C}\left|\frac{p_1}{v_1}\right|$ summa radicum praeter $\frac{p^1}{v_1}$, denique statuamus $V_{\lambda,\mu} = \frac{v_1 \cdot v_2 \ldots\ldots v_n}{v_\lambda \cdot v_\mu}$. His positis erit

$$\text{ipsius } y^{n-1} \text{ coëfficiens} = \frac{Q^1}{P^1} = \overset{1}{C}\left|\frac{p_1}{v_1}\right| = \left|\frac{p_1}{v_1}\right| + \overset{1}{C}\left|\frac{p_2}{v_2}\right| = 0 \qquad (a)$$

$$\text{ipsius } y^{n-2} \text{ coëffic.} = \frac{R^1}{P^1} = \overset{2}{C}\left|\frac{p_1}{v_1}\right| = \frac{\overset{2}{C}|p_1| \cdot V_{\lambda,\mu}}{v_1 \cdot M^1} = \frac{p \cdot \overset{1}{C}|p_2| \cdot V_{1,\mu} + \overset{2}{C}|p_2| \cdot V_{\lambda,\mu}}{v_1 \cdot M^1} \qquad (b)$$

(1) Conf. art. seq.

Digitized by Google

ubi reductis ad eundem denominatorem fractionibus $\frac{p_1 \cdot p_2}{v_1 \cdot v_2}$, $\frac{p_1 \cdot p_3}{v_1 \cdot v_3}$ etc., pro λ et μ indices sumendi sunt radicum, quae eiusmodi productum aliquod constituunt (1), et $\overset{2}{C}|p_1|$ etc. eodem sensu ac $\overset{2}{C}\left|\frac{p_1}{v_1}\right|$ etc. sed omissis divisoribus acceptum est, atque ultimae relationes in aequationibus (a) et (b) ex combinationum theoria immediate sequuntur (2).

Itaque, cum ex aequationibus (a) sit

$$\frac{v_1 Q^1}{P^1} = \frac{Q^1}{M^1} = 0 = p_1 + v_1 \overset{1}{C}\left|\frac{p_2}{v_2}\right|$$

prodit pro $v_1 = 0$ necessario esse $p = 0$, ut Q^1 sive Q, uti suppositum est, fieri possit $= 0$. Quare cum hinc habeatur

$$\frac{R^1}{M^1} = \frac{\overset{2}{C}|p_2| V_{\lambda,\mu}}{M^1},$$

$V_{\lambda,\mu}$ autem in hisce productis factorem v_1 contineat, pro $v_1 = 0$ necessario fit $\frac{R^1}{M^1} = 0$. At de valore ipsius $\frac{R^1}{M^1}$ pro $v_1 = 0$ agitur, dum quaeritur, an casu, quo $Q = 0$, simili substitutione ex $v_1 = 0$ in reliquis membris facta approximatio augeri possit. Sponte deinde perspicitur, eodem modo nos ratiocinari posse casu, quo existente $R = 0$ de valore ipsius $\frac{S^1}{M^1}$ quaeritur, et sic porro; unde elucet, si habetur $Q = 0$, per substitutionem ex aequatione $\overset{1}{\alpha} x - \overset{1}{\beta} y = 0$ in reliquis membris maiorem approximationem ea, quam $\overset{1}{\alpha} x - \overset{1}{\beta} y = 0$ praebet, attingi non posse.

Vix opus est monere, si plures in functione f adsint factores reales inter se *diversi*, de unoquoque eadem tenenda esse ac de $\overset{1}{\alpha} x - \overset{1}{\beta} y$.

18.

II. Quodsi vero plures adsint factores reales atque inter se *aequales*, functio approximans sive limitans fit altioris ordinis. Methodus eadem manet, modo membra summum sequentia ad dimensionem nullam reducantur.

---

(1) E. g. pro $\frac{p_2}{v_2} \cdot \frac{p_3}{v_3}$ est $\lambda = 2$, $\mu = 3$.

(2) Conf. Thibaut *Grundrifs der allgemeinen Arithmetik*, p. 24.

Digitized by Google

Adsint factores aequales numero r, videlicet $(\alpha x - \beta y)^r$ (*), per quos ipsum P divisum statuatur $= M_r = \varrho x^{n-r} + \varrho^1 x^{n-r-1} y^2 + \varrho^2 x^{n-r-2} y + \ldots$ $\ldots + \varrho^{n-r} y^{n-r}$, sitque W aggregatum omnium terminorum $(n-r)^{tae}$ dimensionis et X membrum sequens sive aggregatum terminorum $(n-r-1)^{tae}$ dimensionis. His positis aequatio ipsius f exhiberi poterit:

$$(\alpha x - \beta y)^r + \frac{Q}{M_r} + \frac{R}{M_r} + \frac{S}{M_r} + \ldots\ldots + \frac{W}{M_r} + \frac{X}{M_r} + \ldots\ldots + \frac{K}{M_r} = 0 \qquad (9)$$

sive

$$(\alpha x - \beta y)^r + \frac{Q}{M_r (\mu x + \nu y)^{r-1}} \cdot (\mu x + \nu y)^{r-1} + \frac{R}{M_r (\mu x + \nu y)^{r-2}} \cdot (\mu x + \nu y)^{r-2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{W}{M_r} + \frac{X(\mu x + \nu y)}{M_r} \cdot \frac{1}{(\mu x + \nu y)} + \ldots\ldots + \frac{K(\mu x + \nu y)^{n-r}}{M_r} \cdot \frac{1}{(\mu x + \nu y)^{n-r}} = 0 \qquad (10)$$

ubi omnia huiusmodi membra

$$\frac{Q}{M_r (\mu x + \nu y)^{r-1}}, \quad \frac{R}{M_r (\mu x + \nu y)^{r-2}}, \quad \ldots\ldots \frac{W}{M_r}, \quad \frac{X(\mu x + \nu y)}{M_r} \text{ etc.}$$

erunt nullius dimensionis, ergoque crescentibus ipsis x et y ad limitem constantem convergunt, quicunque valores ipsis μ et ν tribuantur. Hic vero limes constans prodit substituendo limitem relationis $\frac{y}{x}$ puta $\frac{\alpha}{\beta}$ pro ipsa $\frac{y}{x}$, sive ponendo $y = \frac{\alpha x}{\beta}$, quo facto scilicet potestates x^{n-1}, x^{n-2} etc. in numeratoribus et denominatoribus fractionum $\frac{Q}{M^r (\mu x + \nu y)^{r-1}}$, $\frac{R}{M^r (\mu x + \nu y)^{r-2}}$ etc. tolluntur, quippe quae sunt dimensionis nullius, si vero essent dimensionis $-h$, hac substitutione x^h in denominatore remaneret, numerator autem foret constans; quamobrem huiusmodi fractiones, $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$ etc. sive $\frac{R^1}{M^1}$ $\frac{S^1}{M^1}$ etc. (art. praec.) versus nihilum vergunt, crescente variabili x. Cum hoc loco non nisi de relatione $\frac{y}{x}$ agatur, substitutio indicata est identica cum ea $y = \alpha$, $x = \beta$.

Qua peracta si quantitates, in quas Q, R etc. M_r transeunt, designantur per ${}^1Q$, ${}^1R$ etc. ${}^1M_r$, aequatio (10) fit:

$$(\alpha x - \beta y)^r + \frac{{}^1Q(\mu x + \nu y)^{r-1}}{{}^1M_r (\mu\beta + \nu\alpha)^{r-1}} + \frac{{}^1R(\mu x + \nu y)^{r-2}}{{}^1M_r (\mu\beta + \nu\alpha)^{r-2}} + \ldots\ldots + \frac{{}^1W}{{}^1M_r} + \frac{{}^1X(\mu\beta + \nu\alpha)}{{}^1M_r (\mu x + \nu y)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{K(\mu\beta + \nu\alpha)^{n-r}}{M_r (\mu x + \nu y)^{n-r}} = 0 \qquad (11)$$

(*) Sine indice.

Digitized by Google

vel ponendo $\alpha x - \beta y = u_1$ et $\frac{\mu x + \nu y}{\mu\beta + \nu\alpha} = t_1$,

$$u_1' + \frac{{}^1Q}{{}^1M_r} t_1'^{-1} + \frac{{}^1R}{{}^1M_r} t_1'^{-2} + \frac{S}{{}^1M_r} t_1'^{-3} + \ldots + \frac{{}^1W}{{}^1M_r} + \frac{{}^1X}{{}^1M_r . t_1} + \ldots\ldots + \frac{K}{{}^1M_r t_1^{r}} = 0,$$

ubi simul invenitur $y = \alpha t_1 - \frac{\mu u_1}{\alpha\nu + \mu\beta}$, et $x = \beta t_1 + \frac{\nu u_1}{\alpha\nu + \beta\mu}$.

Facile autem perspicitur relationes simpliciores reddi posse, cum quantitates μ et ν plane sint arbitrariae, statuendo $\mu = \beta$, $\nu = \alpha$, et $tg\psi = \frac{\beta}{\alpha}$, nec non loco ipsorum t_1 u_1 introducendo t et u ita, ut sit:

$$u = \frac{\alpha x - \beta y}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},\ t = \frac{\alpha y + \beta x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \text{ sive } x = \frac{\alpha u + \beta t}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},\ y = \frac{\alpha t - \beta u}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (12)$$

unde fit $u = x\cos\psi - y\sin\psi$, $t = x\sin\psi + y\cos\psi$; quare, cum peracta divisione (1) per $(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{r}{2}}$ membrum k^{tum} post summum recipiat in coëfficiente factorem

$$\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{r}{2}}\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{r-k}{2}}} = (\alpha^2+\beta^2)^{-\left(\frac{2r-k}{2}\right)} = \left(\frac{\alpha}{\cos\psi}\right)^{-(2r-k)} = \left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-k}$$

aequatio (11) transit in:

$$u^r + \frac{{}^1Q}{{}^1M_r}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-1} t^{r-1} + \frac{{}^1R}{{}^1M_r}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-2} t^{r-2} + \frac{{}^1S}{{}^1M_r}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-3} t^{r-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{{}^1W}{{}^1M_r}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{r} + \frac{{}^1X}{{}^1M_r}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{r-1} t^{-1} + \ldots + \frac{K}{{}^1M_r}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-n} t^{r-n} = 0 \qquad (13)$$

Ex hac denique aequatione functio approximans derivatur, diversaque evadit, prout quantitates Q, R etc. sint aequales nihilo, an minus, casuque posteriore divisibiles per $(\alpha x - \beta y)$ vel $(\alpha x - \beta y)^2$ etc., vel ad summum per $(\alpha x - \beta y)^{r-1}$; casuque, quo omnia membra inde ab ipso Q usque ad W per quantitatis $(\alpha x - \beta y)$ potestates altiores quam resp. $(r-1)^{tam}$, $(r-2)^{tam}$ et W per $(\alpha x - \beta y)^0$ divisibilia, sive aequalia nihilo essent, membrum sequentium primum, quod non evanescit sive sponte, sive pro $\alpha x - \beta y = 0$, functionem limitantem determinat.

Patet, aequationem (13) non minus prodire, si statim variabiles x et y per ipsas t et u exprimantur, ac deinde in membris $\frac{Q}{M_r}$ $\frac{R}{M_r}$ etc. po-

(1) Quae fit, ut ipsum u fiat membrum summum et reliqua secundum potestates ipsius t progrediantur.

Digitized by Google

natur $u = 0$. Idem hoc est, quod fecit cel. Euler, atque hinc probantur, quae in retinendis reiiciendisque membrorum Q, R etc. terminis vaga primo aspectu videntur, quoniam reiecti pro $u = 0$ evanescunt.

Methodum itaque celeberrimi autoris sequenti modo enunciare licet.

1mo Quoties membri supremi factor, de quo agitur, est complexus, loco variabilium, quae initio aderant, introducantur aliae ope aequationum (12), unde ex $(\alpha x - \beta y)^r$ fit u^r, atque P, M, Q, R etc. recipient formas:

$$P = \mathrm{a}t^{n-r}u^r + \overset{1}{\mathrm{a}}t^{n-r-1}.u^{r+1} + \ldots\ldots + \overset{n-r}{\mathrm{a}}u^n$$

ergo $$M_r = \mathrm{a}t^{n-r} + \overset{1}{\mathrm{a}}t^{n-r-1}.u + \ldots\ldots + \overset{n-r}{\mathrm{a}}u^{n-r}$$

deinde $$Q = \mathrm{b}t^{n-1} + \overset{1}{\mathrm{b}}t^{n-2}u + \overset{2}{\mathrm{b}}t^{n-3}u^2 + \ldots\ldots + \overset{n-1}{\mathrm{b}}u^{n-1}$$

$$R = \mathrm{c}t^{n-2} + \overset{1}{\mathrm{c}}t^{n-3}u + \overset{2}{\mathrm{c}}t^{n-4}u^2 + \ldots\ldots + \overset{n-2}{\mathrm{c}}u^{n-2}$$

$$S = \mathrm{d}t^{n-3} \text{ etc.}$$

2do Fiat post reductiones necessarias in omnibus membris $\frac{Q}{M_r}$ $\frac{R}{M_r}$ etc. substitutio $u = 0$, usque dum perveniatur ad membrum, quod solummodo quantitatem t nec vero quantitatem u contineat. Ut autem cognoscatur, quaenam membra t et u contineant, videndum est, quinam e coëfficientibus b, c, $\overset{1}{\mathrm{b}}$, $\overset{1}{\mathrm{c}}$ etc. aequales sint nihilo. Cui deinde conditioni si nullum membrorum Q, R, S satisfacit, vel quia est ipsum $= 0$, vel solummodo terminos suppeditat formae $t^\varepsilon u^\varepsilon$; membrum ultimum constans $\frac{\mathrm{K}}{M_r}$ posito $u = 0$ adhibeatur, quo casu functio approximans induet formam

$$u^r + \ldots\ldots + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{a}t^{n-r}} = 0$$

Hinc prodibit functionis quaesitae forma generalior; simplicissima autem obtinetur, si membrorum Q, R etc. termini tantummodo spectantur, qui eandem omnes potestatem ipsius t altissimam, e. g. deficiente omni altiore ipsius t potestate, t^{n-r} involvunt, cum inter quodlibet aequationis $P + Q + R \ldots\ldots + \mathrm{K} = 0$ membrum et summam subsequentium ad dextram relatio intercedat, qua demonstratio art. 16. nititur.

Digitized by Google

Reductiones, de quibus diximus, spectant formam $t^{\tau}\,u^{r}$, quae prodit, si membra Q, R divisibilia sunt per potestates ipsius u. Ponamus e. g., Q continere factorem u^{r} sive haberi:

$$Q = \overset{r}{\mathrm{b}}\,t^{n-r-1}.u^{r} + \overset{r+1}{\mathrm{b}}\,t^{n-r-2}.u^{r+1} + \ldots + \overset{n-1}{\mathrm{b}}\,u^{n-1}$$

Hoc casu peracta divisione per u^{r}, statuendum est $u=0$ in quotiente, cui deinde u^{r} rursus apponitur, unde e termino $\frac{Q}{M_r}$ proveniet:

$$\frac{\overset{r}{\mathrm{b}}\,t^{n-r-1}.u^{r}}{\mathrm{a}\,t^{n-r}} = \frac{\overset{r}{\mathrm{b}}}{\mathrm{a}}.t^{r-r-1}.u^{r};$$

haec autem divisio applicari nequit, quoties habetur $\sigma \geqq r$, quo casu $\frac{Q}{M_r}$ posito $u=0$ evanescit. Iustam esse hanc methodum, facile sequenti modo perspicitur. Cum quantitates μ et ν aequationis (9) plane sint arbitrariae, licuisset in membro $\frac{Q}{M_r}\frac{(\mu x+\nu y)^{r-1}}{(\mu x+\nu y)^{r-1}}$, loco substitutionis, quam in omnibus factoribus $\mu x+\nu y$ fecimus ponendo $\mu=\beta$ et $\nu=\alpha$, aliam partiariam adhibere, ponendo scilicet $\mu=\beta$ et $\nu=\alpha$ solummodo in $r-\sigma-1$ factoribus, in reliquis σ vero statuendo $\mu=\alpha$ et $\nu=-\beta$, unde quantitas $(\alpha x-\beta y)^{r}$ in numeratore et denominatore membri $\frac{Q}{M_r\,(\alpha x-\beta y)^{r}.(\beta x+\alpha y)^{r-\sigma-1}}$, quod est nullius dimensionis, tolli potuisset, atque accepto ipso ${}^{*}Q$ ita, ut sit $Q={}^{*}Q(\alpha x-\beta y)^{r}$, post substitutionem ex aequatione $u=0$, sive $\alpha x-\beta y=0$, prodiisset:

$$\frac{{}^{*}Q}{M_r\,(\beta x+\alpha y)^{r-\sigma-1}}(\alpha x-\beta y)^{r}.(\beta x+\alpha y)^{r-\sigma-1} = \frac{{}^{*}\overset{1}{Q}}{{}^{1}M_r(\alpha^2+\beta^2)^{r-\sigma-1}}(\alpha x-\beta y)^{r}.(\beta x+\alpha y)^{r-\sigma-1}$$

et hinc divisione per $(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{r}{2}}$ facta $\frac{{}^{*1}Q}{{}^{1}M^{r}}\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-2\sigma-1}u^{r}\,t^{r-\sigma-1}$

Coëfficiens $\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-2\sigma-1}$, uti supra generaliter $\left(\frac{\cos\psi}{\alpha}\right)^{2r-k}$, iam quantitatibus a, b etc. inest, unde e. g. pro $\sigma=1$ haberetur:

$$u' + \frac{\overset{1}{\mathrm{b}}}{\mathrm{a}}\,t^{r-2}u + \frac{\overset{1}{\mathrm{c}}}{\mathrm{a}}\,t^{r-2} = 0;$$

patet enim membrum Q per u divisibile non esse, quoties non sit $\mathrm{b}=0$. Quae de membro Q dicta sunt, manifesto de reliquis etiam, si per potestatem u^{r} dividi possunt, valent.

Digitized by Google

His operationibus facile eveniet, ut functio ϕ ipsa sit per aliquam variabilis u potestatem divisibilis, quo casu aequatio $u=0$ ipsa est functio limitans primi gradus. Vel si prodit aequatio formae $Au^n+Bu^{n-1}+Cu^{n-2}+\ldots+F=0$, radices habens reales, veluti $u=k$, aequatio $u-k=0$ est functio approximans primi gradus, et prodibit aliqua altioris, substituendo k ubique, excepto in factore $u-k$, loco ipsius u.

Denique aequatio resultans imaginaria v. c. $u^2+B^2=0$ (*) fieri potest, quod ostendit, functionem f, licet membrum summum contineat factorem $u=\frac{\alpha x-\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, nihilominus tamen pro valoribus ipsius x vel t, solummodo iis, qui intra certos limites versantur, valores reales ipsius y vel u suppeditare.

19.

Ex iis, quae articulis 16. 17. et 18. exposita sunt, corollaria notatu fortasse haud indigna sequuntur haec.

1) Theorema art. 16. stabilitum invertere non licet, id est, asseri nequit, si functionis variabilium x et y membrum summum resolvi possit in factores reales primi gradus, functionem etiam, crescente ipsa x vel t, reales valores ipsius y vel u *semper* suppeditare; contra vero, quoties membrum summum non ita est resolubile, certo valor quidam variabilis independentis existit, ultra quem functio nullum amplius realem, sed *omnes* imaginarios variabilis dependentis reddit valores.

2) Omnis functio ordinis imparis n usque in infinitum habebit valores reales; nam numerus radicum, quas membrum summum $a\xi^n+\overset{1}{a}\xi^{n-1}+\ldots+\overset{n}{a}=0$ continet, est impar, atque casus ille exceptionis, ubi, etsi membrum summum in factores resolvi potest, functio nihilominus pro quantiscunque ipsius x valoribus reales ipsius y non semper praebet, locum habere nequit, nisi numerus factorum inter se aequalium est par; differentia autem inter numerum parem et imparem est ipsa semper impar, quamobrem, quoties n est impar, semper adsunt

(*) Aequatio formae $u^2+B^2=0$ prodire potest, si habetur $r=2$ et $Q=0$.

Digitized by Google

etiam factores aequales membri summi, quorum numerus est impar (1), unde functio continuo dabit valores reales.

3) Cum quaelibet functio intra certos solummodo limites valores reales praebens, unum absolute maximum minimumve vel plures inter se aequales necessario habeat, sequitur, omnem algebraicam duarum variabilium functionem, cuius membrum summum non nisi factores imaginarios continet, certo habere valores absolute maximos minimosve. Absolute diximus maximos minimosve, quia relative maximi minimive ipsi ad limitem quendam convergere possunt (2). Plures absolute maximos minimosve inter se aequales dabit e. g. aequatio:

$$y = a + b \sin x + c \sin px$$

existente $a > b + c$, $b > \dfrac{c}{\sin\left(\frac{4m+3}{p}\right)\frac{\pi}{2}}$ sive $b \cdot \sin\left(\frac{4m+3}{p}\right)\frac{\pi}{2} > c$,

et $\pi = 3,14159\ldots\ldots$,

atque accepto pro ipso p numero quolibet positivo integro formae $(4m+1)$. Nam quoties ipsa x valorem numeri $\frac{\pi}{2}$ multiplum formae $(4m+1)\frac{\pi}{2}$ recipit, variabilis y obtinet valores absolute maximos, et pro multiplis formae $(4m+3)\frac{\pi}{2}$, valores absolute minimos. Dum vero variabilis x inde ab aliquo ipsius π multiplo $= n\pi$ usque ad $(n+\frac{1}{2})\pi$ crescit, membrum secundum, puta: $c \sin px$, obtinet p vicibus valorem suum maximum minimumve (valores negativos hic minores quam positivos accipiendo), quo fit, ut interea etiam ipsa y valores relative maximos et minimos, eosque semper positivos, quia $a > (b + c)$, recipiat, unde valores negativos quantitatis $c \sin px$ tanquam minores spectare licuit. Curva per aequationem $y = a + b \sin x + c \sin px$ repraesentata circa lineam distantia a ab axe abscissarum x remotam sursum deorsumque serpet, semper eodem modo oscillans ob terminum $c \sin px$.

---

(1) Huc etiam casus pertinet, quo factor aliquis semel tantummodo adest.
(2) Conf. supra art. 11, I.

Digitized by Google

4) Quamquam cel. Euler in investigandis asymptotis superficierum secundi ordinis methodum secutus est art. 17. et 18. expositae similem (1), illa tamen generaliter ad functiones plurium variabilium extendi nequit, contra ea, quam art. 11. seq. exposuimus, ad quamlibet functionem applicari potest. Praeterea eatenus differunt, quod hac functio maxime approximans ordinis cuiusdam n^{ti}, methodo Euleriana autem, dum simplicissimam eiusdem n^{ti} ordinis exhibet, non semper maxime approximans prodeat; hinc gradus approximationis ipsius ϕ utraque methodo inventae longe discrepare potest. Exemplum art. 14. iam clarius haec ostendit, ubi ipsa ϕ methodo Euleriana inventa per $^*\phi$ indicetur. Supponendo enim $f=0$ esse aequationem conchoidis, fit aequatio (9) art. 18.

$$x^2 + \frac{2bx^3}{x^2+y^2} - \frac{(a^2-b^2)\,x^2}{x^2+y^2} - \frac{2a^2bx}{x^2+y^2} - \frac{a^2b^2}{x^2+y^2} = 0$$

hinc (10) (*) ibid.

$$x^2 + \frac{2bx^3}{(x^2+y^2)x} \cdot x - \frac{(a^2-b^2)\,x^2}{x^2+y^2} - \frac{2a^2bx\,.\,y}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{1}{y} - \frac{a^2b^2y^2}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

ergo (11) $x^2 - a^2b^2 . \frac{1}{y^2} = {}^*\phi = 0$ sive $y = \frac{ab}{x}$ (**),

quoniam reliqui termini posito $x=0$ omnes evanescunt; simulque patet, $x=0$ repraesentare asymptotam vel limitem primi gradus functionis absolutae, propterea quod pro $x=0$ fit $y=\infty$. Supra autem nacti sumus

$$xy + \frac{b}{2a}\,x^2 - ax - ab = \phi = 0,$$

sive ((7) art. 14.) $$y = \frac{ab}{x} + a - \frac{b}{2a}\,x.$$

Substituendo deinde ubique $y = \frac{1}{\eta}$ et quadrando obtinemus:

$f = a^2b^2\eta^2 - x^2 + 2a^2bx\eta^2 + (a^2-b^2)\,x^2\eta^2 - 2bx^3\eta^2 - x^4\eta^2 = 0$ ((8) art. 14.)

$\phi^2 = a^2b^2\eta^2 - x^2 + 2a^2bx\eta^2 + (a^2-b^2)\,x^2\eta^2 - bx^3\eta^2 + \frac{b^2}{4a^2}\,x^4\eta^2 = 0$

$^*\phi^2 = a^2\,b\eta^2 - x^2 \ldots\ldots = 0$

---

(1) Introd. in anal. inf. etc. Append. cap. V.

(*) Conf. 2) art. praec.

(**) Videatur Introductio etc. Lib. II. cap. XI. genus XIII. linearum quarti ordinis.

Digitized by Google

unde patet, quamvis utraque functio ϕ et $^*\phi$ sit secundi ordinis, gradum tamen approximationis illius esse tertium, huius vero tantummodo primum, quod, si magis placet, extrahendo radicem ex formula (1. *a*) art. 14. confirmari potest; unde prodit:

$$y = \frac{ab}{x} + a - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x - \frac{x^2}{2a} - \text{etc.},$$

deinde habetur:

ex ϕ $\qquad y = \frac{ab}{x} + a - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x$

ex $^*\phi$ $\qquad y = \frac{ab}{x}$

Haec postrema aequatio non minus ope methodi generalis art. 11. indicatae erui potuisset, si approximatio non altissimi gradus, quem functio secundi ordinis suppeditare potest, sed primi tantummodo quaereretur eo modo, ut, in forma generali $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ statuto $C=0$ $E=0$ (quo obtineret variabilis y in utraque functione eundem valorem pro $x=0$) deinde terminis, qui quantitates x^2 et x involvunt, tanquam evanescentibus prae ipsis xy et F neglectis, quantitas $\frac{F}{B}$, quae sola remanet, ex quotiente differentiali $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ determinaretur.

SECTIO II.

DE FUNCTIONE APPROXIMANTE DISSERITUR, UBI VALORUM PRO APPROXIMATIONE PRO QUAVIS VARIABILI ABSOLUTA DATI SUNT PLURES DISCRETI.

20.

Cum aequationes I. art. 4. sive II. art. 6. pro uno systemate valorum pro approximatione functionem ϕ plane determinent, sponte intelligitur, si pro pluribus talium valorum cuiusvis variabilis approximatio desideretur, fieri non posse, ut pro unoquoque systemate, quod ex illis formare licet, aequationibus allatis satisfiat, atque, si illi valores variabilium $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\omega$ resp. sint numero $M_1, M_2, M_3, \ldots M_\omega$, haec syste-

Digitized by Google

mata esse numero $= M_1 . M_2 . M_3 \ldots\ldots M_\omega$. Quare cum pro singulis numeris M_μ etc. quilibet integer positivus inde ab 1 substitui, et insuper pro quibusdam eiusmodi valoribus aliae conditiones (1) adiici possint, facile perspicitur, tantam hic adesse casuum varietatem et multitudinem, ut nullo modo omnes complecti nec solutionem generalem ac completam exhibere possimus. Quae cum ita sint, in hoc problemate resolvendo nil fieri poterit, nisi ut momenta generalia ac principalia assignentur, quorum ratio singulis casibus erit habenda.

21.

Sint variabiles independentes x_1, x_2, x_3, ... x_ω, valores pro approximatione a_1, a_2, a_3, ... a_ω, b_1, b_2, b_3, ... b_ω, c_1, c_2, c_3, ... c_ω, etc. indicibus 1, 2, 3, ... ω semper ad eandem variabilem x relatis.

Primo investigandum est, num isti valores indefinite combinari debeant nec ne; nihilque refert, an natura functionum f et ϕ, an aliae conditiones appositae combinationes quasdam recusent; atque patet, has esse variationum formas ex ω seriebus

1	2	3	4.....
$a_{1,}$	$b_{1,}$	$c_{1,}$	$d_{1,}$ .....
$a_{2,}$	$b_{2,}$	$c_{2,}$	$d_{2,}$ .....
⋮	⋮	⋮	⋮
$a_{\omega,}$	$b_{\omega,}$	$c_{\omega,}$	d_{ω} .....

resp. M_1, M_2, M_3, ... M_ω elementorum, e quibus nulla existente lege, quae formas quasdam prohibet, manifesto conflare licet variationum multitudinem producto $M_1 . M_2 . M_3 \ldots\ldots M_\omega$ aequalem, uti art. praecedenti iam fuit indicatum.

Quaelibet variatio suppeditat valorum pro approximatione systema unum, quorum, exclusis prohibitis, numerus sit $\underline{M}$; erit e. g. $\underline{M} = 4$,

(1) E. g. conditio adsit pro aliquo valore sive systemate valorum pro approximatione, ut haec sit secundi gradus; pro alio autem systemate lex vaga solummodo exstet, ne differentia $f - \phi$ quantitatem aliquam q transgrediatur.

Digitized by Google

si quatuor eiusmodi valores pro quavis independenti adsunt, omnibusque formis prohibitis praeter 1111, 2222, 3333, 4444. Statim deinde intelligitur, quodvis systema praebere inter functiones f et ϕ ad minimum relationem unam, quae si erit aequatio (1), unum coëfficientem functionis ϕ determinat, cuius autem forma hic uti in prima sectione aliunde data supponitur. Numeris igitur constantium functionis ϕ et relationum, quibus aequationes nascuntur, resp. per N et R designatis, erit generaliter loquendo ipsius R valor maximus $= N$, et accepta functionis ϕ forma uti art. 7. (i. e. integra, rationali, n^{ti} ordinis et $(\omega+1)$ variabilium) N aequalis numero ${}^nT^{\omega+1} - 1$, sive habetur hoc casu generaliter

$$R \overset{=}{<} {}^nT^{\omega+1} - 1. \qquad (1)$$

Quodsi insuper aliae conditiones (indeterminatae) adsunt, quatenus his regula (1) mutetur, non nisi casu speciali definire licet. Verum etiam his praetermissis duae ab hac regula exceptiones inveniuntur.

I. Functiones f et ϕ ita comparatae esse possunt, ut dependentis variabilis valorum, qui conspirant, numerus multo maior sit multitudine constantium functionis ϕ; quod vero cum prorsus a natura functionum pendeat, postulari non potest, nam numerus illorum aequalis multitudini constantium revera indeterminatarum functionem quaesitam plane determinat. — Sit e. g.

functio absoluta	$y = a \sin x$	(2)
functio approximans	$0 = Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$	(3)
sitque per conditionem	$0 \overset{>}{<} CD^2 + B^2F^2 - BDE$ (*)	
et absolute	$a > \frac{D}{B}$	

Quibus positis aequatio (3) repraesentat hyperbolam, cuius asymptota linea $-\frac{D}{B}$ ab axe abscissarum x distat, quo fit, ut hyperbola lineam sinuum aequatione (2) indicatam non quatuor sed innumeris punctis secet. Nihilominus autem ob conditiones adiectas tres tantummodo

---

(1) Aequationem e. g. non exhibet relatio $f(a_1, a_2 \ldots\ldots a_\omega) - \phi(a_1, a_2, \ldots\ldots a_\omega) < q$, quae indeterminata nominari poterit.

(*) Si esset $CD^2 + B^2F - BDE = 0$, formula (3) lineam rectam exhiberet.

Digitized by Google

valores pro approximatione plane arbitrarii sunt, quibus datis multimodis conditionibus satisfieri potest, simplicissime ponendo $D = 0$, unde axis ipsa abscissarum fit asymptota.

Aliud exemplum offerunt aequationes

$$y = a\,tg\,x$$

et $$0 = A^2x^2 + 2ACxy + C^2y^2 + Dx + Ey + F,$$

quarum posterior parabolam indicat. Sed eatenus hoc exemplum a priori differt, quod quicunque quatuor valores pro approximatione (excepto solo $x = \frac{n\pi}{2}$, designante ipso n numerum integrum imparem) accipiantur, intersectiones parabolae cum linea tangentium sint innumerae.

II. Altera adest exceptio, priori contraria, si functio ϕ iam conditionem pro coëfficientibus suis involvit, cui satisfieri saepius nequit, e. g. irrationalitatem; nam haec, quanquam solummodo relationis indeterminatae vice fungitur, forsan impedit, quo minus tot systematibus ex asse satisfieri possit, quam quibus pro numero N liceret. Deinde quodammodo casus huc pertinere videtur, quo functiones f et ϕ sunt algebraicae et eiusdem ordinis, adiecta conditione, ut non prorsus fiant identicae. Hic numerus systematum, e quibus aequationes oriuntur, ad minimum unitate minor esse debet numero ${}^nT^{\omega+1} - 1$, cui si ille aequalis esset, functiones f et ϕ plane fierent identicae. Sic duae sectiones conicae nonnisi quatuor punctis sese intersecare possunt.

22.

Quodsi habetur $R < N$, nec aliae adsunt conditiones aut relationes indeterminatae, generaliter loquendo pluribus aequationum I. art. 4. sive II. art. 6. satisfieri poterit, e quibus praesertim eligendae sunt, quae infimis potestatibus incrementorum respondent, ergo ex aequationibus I. *b*) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ etc. Numerus talium aequationum est $N - R$, cum quibus multimodis agere licet. Ex natura scilicet problematis speciali, qua pendet numerus $N - R$, diiudicandum erit *a*) pro quibus valoribus pro approximatione quaedam ex istis aequationibus,

Digitized by Google

b) quasnam ex his pro quolibet illorum adhibere conveniat; nam in eodem systemate eiusmodi valorum magni saepe momenti esse potest, cuiusnam maxime variabilis absolutae respectu habito functio approximans ad absolutam f accedat. Designantibus e. g. ipsis f et ϕ superficies quasdam machinae alicuius in punctis, quae respondent valoribus $x=a_1$ et a_2, $y=b_1$ et b_2, sese tangentes, moveatur utraque eadem celeritate in directione abscissarum x, sintque momenta in puncto coordinatis a_1, b_1 respondente aliis maiora; tunc ad augendam, quatenus ex adhaesione oritur, frictionem, quae impediat dato tempore, quo minus altera superficies moveatur, facere potest, ut contactus in puncto coordinatis a_1, b_1 respondente, quam maximus reddatur, praecipue respectu ipsarum x, etiamsi contactus in reliquis punctis primum tantummodo gradum assequi possit. Aliud exemplum astronomia suppeditat, quoties ad computandum phaenomenon quoddam orbitae corporis coelestis verae approximata substituitur, maximaque approximatio pro medio phaenomeni desideratur, quae vero hoc casu praesertim scite eligendis valoribus a_1, a_2 obtinetur; e. g. dum eclipsis secundum proiectionis methodum calculatur, pro duobus temporibus loca corporis obscurantis (lunae) requiruntur, quibus deinde orbita rectilinea superstruitur, tempora autem illa generaliter ita eliguntur, ut, quantum praespici possit, momentum coniunctionis in ascensione recta ab utroque tempore eodem intervallo distet (1).

Supra dictum est: generaliter loquendo existente $R < N$ pluribus aequationum I. vel II. satisfieri posse, nam casus dantur, quos excipi oportet, uti in exemplo primo art. praecedentis, existente aliquo valo-

---

(1) Inter plura opera, quae de hoc argumento occasione magnae eclipsis solis anni 1820 prodiere, dissertatio inauguralis cel. Gerling praecipuum locum tenet, qua plures methodi celeberrimi Gauss huc spectantes expositae sunt. His aliisque a maximo praeclarissimoque hoc geometra benignissime communicatis, nec non subsidiis, quae locorum vicinitas subministravit, autor huius opusculi usus est calculans hanc eclipsin pro pluribus provinciarum Rhenanarum et Guestphalicarum locis. *Rheinisch-Westphälischer Anzeiger* 1820. No. 69.

Digitized by Google

rum α_1, α_2 etc. $= \left(\frac{m+1}{2}\right)\pi$, pro quo primae illarum aequationum $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ nullo modo responderi potest, nisi conditio, ut abscissarum axis sit parallela asymptotae, deleatur; nam posito $x = \left(\frac{m+1}{2}\right)\pi$, tangens lineae sinuum est axi illi, et hinc asymptotae parallela; hyperbolae autem nulla datur tangens asymptotae parallela, quippe quae ipsa est eo modo limes tangentium, ut nulla exstet angulum tam acutum cum axi hyperbolae efficiens.

23.

Problema huius sectionis si ita enunciatur: assignare functionem ϕ, quae pro iisdem independentium valoribus cum M datis valoribus alius functionis f conspiret, simplicissime ope formulae interpolationis solvitur, quam Cll. Lagrange et Gauſs exhibuerunt (1). Quo casu, nullis prohibitis volorum pro approximatione combinationibus, habetur

$$M = M_1 . M_2 . M_3 ..... M_\omega ,$$

ac functionis quaesitae ordo $n =$

$$(M_1 - 1) . (M_2 - 1) . (M_3 - 1) ..... (M_\omega - 1).$$

Insuper haec formula ea proprietate gaudet, ut, quamquam nulli aequationum I. art. 4. (omissa scilicet prima $f = \phi$) pro aliquo valore independentium ex asse satisfacit, omnibus tamen pro M valoribus indicatis eatenus respondeat, quod utraque functione secundum dimensiones independentium evoluta, termini easdem potestates earundem variabilium involventes plane conspirent, quatenus hi termini functioni ϕ insunt; unde sponte intelligitur, terminum, inde a quo variabiles computantur, additione vel subtractione idonearum constantium, ita statuendum esse, ut, quantum fieri potest, medius sit inter valores pro approximatione.

Praeterea cum formula interpolationis capite II. fusius erit pertractanda, hic ei nou amplius immoremur, observantes solummodo, hu-

---

(1) Journal de l'école polytechnique cahiers 7 et 8. (1795 L.) 1812. Commentationes Soc. Reg. Gotting. recentiores. Vol. III. Methodus nova etc. Vide cap. II.

Digitized by Google

ius sectionis applicationem continere doctrinam de intersectione linearum et superficierum curvarum, si intersectionis puncta vel lineae data supponuntur.

Superficies enim hoc casu non solum singulis punctis sed lineis plerumque sese secabunt, unde universi comptexus valorum independentium eadem approximatione gaudentes aderunt. Quae quomodo inveniri possint, capite III^tio erit indicatum.

Ceterum cum haec commentationis pars prior academicae dissertationis vice fungitur, ne huius fines solitos transgrediamur, reliquorum capitum expositionem ad aliam occasionem reservamus, totius vero commentationis summarium hic apponimus.

Digitized by Google

SUMMARIUM TOTIUS COMMENTATIONIS.

Art. *Introductio.* Pag.

1.... Functionum definitio ac earum distinctiones 3
2. 3.. Commentationis argumentum, divisiones et definitiones necessariae 8

CAP. I. *Valores pro approximatione discreti.*

SECT. I. *Unus eiusmodi valor pro unaquaque variabili absoluta.*

4.... Theorema principale $f = \phi$, $C_{1,0} = \Gamma_{1,0}$, etc. 11
5.... Relatio inter constantium ipsius ϕ numerum N et gradum approximationis m 15
6.... Formulae art. 4. plerumque fiunt $f = \phi$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, etc. 18
7.... Plures formae, quas accipere potest functio approximans 19
8.... Forma rationalis integra ulterius investigatur, relationes inter m et n (*), algorithmi numerici expediti 20
9. 10. Exempla e geometria, pro superficiebus, pro lineis curvis, casus exceptionis 31
11.... Functio ϕ pro valoribus extremis dependentis, limites, eorum conditiones etc. 35
12.... Alia limites inveniendi methodus pro casu specialiori 37
13. 14. Exempla e geometria, hyperbolae asymptota; conchoidis asymptota 2^{di} gradus 39
15. 16. Euleri theorematis circa membri summi functionis rationalis integrae $f(x, y) = 0$ factores et limites huius functionis demonstratio nova et rigorosa 44
17. 18. Euleriana methodus pro inveniendis limitibus (asymptotis) brevius exponitur 49
19.... Corollaria quaedam, ac comparatio huius methodi cum generaliori art. 11. 57

SECT. II. *Plures cuiusvis independentis valores pro approximatione.*

20.... Multitudo ac varietas casuum solutioni generali obstat 60
21.... Systematum, quae ex resp. $M_1, M_2, \ldots M_\omega$ valoribus pro approximatione oriuntur, numerus numero N comparatur; exceptiones 61
22.... Quatenus pluribus aequationum art. 4 et 6. satisfacere liceat 63
23.... Generalissimam huius problematis solutionem formula interpolationis cel. Lagrange ampliata praebet. 65

(*) Relatio simplex inter productorum e quibusvis μ numerorum naturalium $1 . 2 \ldots . \omega$ summam $(\overset{\mu}{C}_\omega)$ et coëfficientem binomialem $\overset{\mu+1}{\omega+1}B$ in nota art. 8. demonstratur.

Digitized by Google

CAP. II. *Complexus valornm pro approximatione continuus pro quavis variabili absoluta* (ab $x = a$ usque ad $x = b$).

Expositiones et determinationes ulteriores.

Determinatio I. f et ϕ ad terminos n^{tos} dimensionis usque conspirent.

A. series Tayloriana; *B*. formula interpolationis.

Gaussiana integrationis methodus hac formula nitens ad duas pluresve variabiles extensa indicatur; annotationes de hoc argumento.

Determinatio II. Series per sinus et cosinus multiplorum angulorum x, y procedentes conspirent; methodus coëfficientes determinandi integrationis ope.

Determinatio III. Summa potestatum μ^{torum} valorum differentiae $z-\zeta$ sive $\Sigma (z-\zeta)^\mu$ sit minima. Determinationi satisfieri nequit ex asse, proxime autem computando $z-\zeta$ pro omnibus valoribus $x = a + mk$, $y = b + nl$, ubi successive $m = 1, 2, \ldots (p-1)$, $n = 1, 2, \ldots (q-1)$ statuendum est. Conditiones, quas ill. Lagrange pro valoribus functionum maximis et minimis exposuit, pro numero variabilium maiori nimis prolixae; expositio ac demonstratio pro $\mu = 2$ secundum art. 182. Theoriae motus corp. coel.; calculi compendia. Methodus quadratorum minimorum calculi probabilium cum hac determinatione comparatur.

Determinatio IV. Summae $\Sigma (z-\zeta)^2 = \Sigma u^2$ et $\Sigma (\Delta u)^2$ fiant, quantum licet, minimae. Calculus ulterior pro una variabili absoluta. Substitutiones $\Omega = \int_a^b u^2 \partial x$ et $\Omega^1 = \int_a^b (\Delta u)^2 \partial x$ pro Σu^2 et $\Sigma (\Delta u)^2$ (vide cap. V.); ex evolutione ipsius $\Omega^1 = \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}, k + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \cdot \frac{k^m}{1 \ldots\ldots m} \right) \partial x$ oriuntur ex quavis aequatione $\frac{\partial \Omega^1}{\partial A_\mu} = 0$ tot aequationes, quot ei insunt potestates ipsius k, ergo $m + \mu$ aequationes, quia ipsum k est arbitrarium; combinandae sunt omnes ex Ω et Ω^1 ergo $\frac{3}{2} m^2 + \frac{m}{2} + 1$ aequationes secundum minimorum quadratorum methodum. Aequationes redduntur simpliciores 1) evolvendo integralia, 2) colligendo coëfficientes ipsius A_μ; formae aequationum generales. Integralia cum sint definita, Gaussiana methodo inveniri possunt; algorithmus; ad quotientes differentiales, qui per reductiones indicatas integralium locum tenent, methodus haec facile extenditur. Functionis ϕ hinc prodeuntis error maximus et praecisio.

CAP. III. *Data utraque functione quaeruntur valores pro approximatione* (*).

Methodus de maximis et minimis solutionem praebet generalem, modo valor minimus non ipsius u sed ipsius u^2 sive generaliter potestatis u^{2m} quaeratur.

Aequationibus $u \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $u \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ etc. quae hinc prodeunt, satisfit:

(*) Prob. 2. art. 3.

Digitized by Google

I. Ponendo $u = 0$ sive $z = \zeta$; obtinetur aequatio conditionalis $f(x_1, x_2, \ldots x_\omega) = \phi(x_1, x_2, \ldots x_\omega)$, dum ipsae z et ζ ex aequationibus datis $F(z, x_1, x_2, \ldots x_\omega) = 0$ et $\Phi(\zeta, x_1, x_2, \ldots x_\omega) = 0$, eliminantur. Eliminationis methodus generalis, nisi hae aequationes algebraicae snnt, assignari nequit; cel. Bezout methodus pro numero aequationum quolibet M exponitur, adiectis cel. Euler calculi compendiis pro $M = 2$.

II. Aequationibus $u\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $u\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ etc. satisfit ponendo $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ etc.; quibus an prodeat valor ipsius u minimus casu speciali inuestigari oportet, qua in re pro numero variabilium maiori methodus adhiberi debet similis ei, qnae art. 182. Theoriae motus (supra cap. II·) exposita est.

Problema: invenire intersectiones et contactus linearum et superficierum, huc spectat; annotationes quaedam de hoc argumento.

CAP. IV. *Data functione approximanti ϕ quaeritur absoluta f* ex ϕ, $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$ etc. (*)

Expositio huius argumenti generalis; methodus tangentium indirecta, figurae involvenstes (enveloppes).

CAP. V. *Relationes quaedam singulares inter f et ϕ.*

1. Integrale. $\int_{L(x1)}^{L(x2)} \int_{L(y1)}^{L(y2)} F(x,y)\, \partial x\, \partial y$, est limes summae

$$0 \ldots (p-1) \sum^{m} 0 \ldots (q-1) \sum^{n} F\big(L(x1) + mk,\ L(y1) + nl\big)\ kl$$

crescentibus ipsis p et q, ac positis $k = \frac{L(x2) - L(x1)}{p}$, $l = \frac{L(y2) - L(y1)}{q}$.

2. Existente ΔF semper minore quam maximus et maiore quam minimus valorum, quos recipit functio f substituendo pro unaquaque variabili eandem suo incremento auctam, in quibuscunque sit combinationibus, erit $\frac{\partial^\omega F}{\partial N} = f$, ubi $\partial N = \partial x_1 . \partial x_2 \ldots . \partial x_\omega$; demonstratur hoc theorema tribus modis, scilicet secundum ill. Lagrange et cel. Crelle et autoris methodum.

Facillime hinc deducuntur formulae rectificationis, quadraturae et cubaturae. Forma curva cum rectilinea resp. planis inclusa quoad aream resp. volumen directe comparari potest, quoad longitudinem vero resp. aream superficiei nequit, nisi statuitur medium quoddam comparationis; expositio huius medii. Sponte hinc sequuntur formulae 1) curvarum rectificationis, 2) superficierum quadraturae, 3) curvarum quadraturae, et 4) cubaturae. Artificia praecipua in inveniendis integralibus, quae in his formulis occurrunt.

(*) Prob. 3. art. 3.

Digitized by Google

VITAE CURRICULUM.

E. J. C. F. Christianus de Riese natus sum die VI. Dec. MDCCXC, patre carissimo principi serenissimo A SALM-HORSTMAR a consiliis intimis, matre dilectissima ex gente Machenhauer.

Vix e pueritia excedens, in qua humanioribus, ut fieri solet, partim in scholis publicis, partim Coesfeldiae institutionibus privatis formabar, ad matheseos elementa nullo, quod dolebam, duce peritiori animum appuli, nec minus, postea cum, ut studia iuridica et cameralia excolerem, anno $180\frac{9}{10}$ in universitate litteraria, quae eo tempore Monasterii vigebat, et inde a mense Aprili anni 1811 (per semestre enim hibernum in cadastro geometrae munere functus eram) Giessensi commoratus sum, omne otium et, quantum licuerat, tempus mathesi et physicae dicata fuerunt, in quibus ut procederem, Monasterii institutionibus professoris iam beati GOERTZ in quasdam matheseos particulas et deinde in academia Giessensi omnibus clarissimi SCHMIDT praelectionibus interfui.

Subito autem anno 1813 studia interrupta sunt; quamvis enim iam prius officiis militaribus, quae hoc tempore unicuique a novo dynasta iniungebantur, satisfecissem, nihilominus tamen a praefecto Franco-Gallico iussus sum, domum redire, qui in legionibus sic dictis *Garde d'honneur* stipendium mererer. Cui vero iussui quo minus responderim, impeditus, hostibus eiectis statim sub signis Borussicis militavi, mense Maio anni 1814. expediens in belli commissariatu tertiae exercitus partis vocatus.

Bello finito quum reges principesque, qui de Germaniae statu decernerent, Vindobonae convenissent, patrem, eo tempore plurium principum negotia gerentem, in praeclaram hanc urbem et istinc Berolinum, secretarii vice fungens, sum secutus, et negotiis peractis assessor camerae nominatus.

Initio deinde anni 1817 Serenissimus princeps A SALM-HORSTMAR consiliarium conclavis (*Kabinets-Rath*) me appellavit, quem Gottingae eum sequi, nec non cum eo praelectiones frequentare et repetere simul iussit. Quod cum maxime ansam mihi dederit, studia dilecta excolere,

Digitized by Google

fructus, quantum liceret, percipere ex hac litterarum sede, summo opere summaque cura nisus sum, ipsis quodvis tempus ac otium peractis muneris officiis impendens. Id quod si quodammodo successerit, celeberrimis viris THIBAUT, MAYER, HAUSMANN et STROMEYER, praesertimque summo ac praeclarissimo GAUSS sempiterno obstrictus maximas gratias debeo.

Sesquitertio postea anno cum Coesfeldiae reversus essem, plura impediierunt, quo minus desiderio matheseos et physices studii, uti cupiebam, satisfacere possim. Verumtamen duo fuerunt problemata graviora, quorum solutioni praecipue incubui; alterum scilicet circa longitudines quorundam arcuum e duobus circulis sese tangentibus alterius radio abscissorum, cuius problematis solutio directa et generalis magnis difficultatibus premitur, indirecta autem satis expedita egregiae solutionis, quam cel. et unicus GAUSS de KEPLERI problemate dedit, amplificatione quadam successit. Alterum problema eo consistit, indicare Goniometrum, cuius ope pro crystallis, quorum plana laevitatem habent specularem, praecisionem usque ad pauca minuta secunda, pro aliis vero crystallis eiusmodi planis non praeditis ad prima attingere liceat. Huius deinde problematis solutio societati Gottingensi amicorum rei metallicae peritorum, qui socium me cooptarant, tradita est.

Inde a medio fere anno praeterlapso cum Berolini morari concessum mihi esset, in mathesin et physicam operam navavi, haud parum adiutus a clarissimis professoribus ERMAN, DIRKSEN et MITSCHERLICH, quibus plurimum debeo. Deinde a primis huius anni mensibus negotium fuit, (omissa scilicet, quam in mente habui, de calore disquisitione) de duarum functionum approximatione tractatum conscribere, cuius partem priorem in dissertatione praecedenti, totius autem summarium ad huius calcem annexum invenitur.

Princeps denique Serenissimus supra laudatus pro administrandis iuribus, quae sibi ex decreto conventus Vindobonensis nec non ex Regiis edictis d. d. 21ma Iunii 1815 et 30ma Maii 1820 competunt, a consiliis regiminalibus me designavit.

Digitized by Google

THESES.

1) Mechanica pertinet ad mathesin puram.
2) Phaenomena caloris mere dynamice explicari nequeunt.
3) Ad explicanda omnia luminis phaenomena theoria undulationis Cl. Young et Cl. Fresnel quodammodo adhuc transformanda est.
4) Totius rigidae superficiei terrae formatio ex theoria, quam dicunt Neptunismum, derivari nequit.
5) Quod pulchrum dicitur in liberalibus artibus, praecipue in musica et architectura, generaliter loquendo eo redit, ut omnes vel eae certe, in quibus obiectum propositum praesertim vertitur, relationes facile detegantur.
6) Ab anorganicis ad organica nullus est transitus.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google